高等数学 A (I) 2023-2024 秋季学期期末试题

考试时间：2024 年 1 月 4 日

一、（20 分）

1. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-e\right)$.
2. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n+1$ 阶可导且

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,\ f^{(n)}(0)=a.$$

求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{f(e^x-1)-f(x)}{x^{n+1}}$.

二、（20 分）

1. 设 $F(u,v)$ 有连续的二阶偏导数，$z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定的隐函数. 计算并化简

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

2. 给定方程组

$$\begin{cases} xy+yz^2+4=0 \\ x^2y+yz-z^2+5=0. \end{cases} \tag{1}$$

试讨论在点 $P_0(1,-2,1)$ 附近方程组(1)能确定哪些隐函数？并计算(1)确定出的隐函数在 P_0 处的导数。

三、（20 分）求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值。

四、（20 分）

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的一个领域内有定义且在 $(0,0)$ 处连续。若极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，求证：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。
2. 平面 $x+y+z=1$ 截圆柱面 $x^2+y^2=1$ 得一椭圆周，试用多元微分学的方法求此椭圆周上到原点最近及最远的点。

五、（20 分）

1. 设 $f(x)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期为 $T\neq 0$ 的无穷阶光滑函数，k 为任一给定的自然数。证明一定存在的点 $\xi\in\mathbb{R}$, 使得 $f^{(k)}(\xi)=0$.
2. 设函数 $f(u,v)$ 有连续偏导数 $f_u(u,v)$, $f_v(u,v)$, 且满足 $f(x,1-x)=1$. 证明：函数 $f(u,v)$ 在单位圆周 $u^2+v^2=1$ 上至少存在两个不同的点满足下列方程：$vf_u(u,v)=uf_v(u,v)$.