

高等数学 A (I) 2023-2024 秋季学期期中试题

考试时间：2023 年 11 月

一、(20 分) 求下列各极限

(1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n!}$.

(2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{(n+1)^3} + \frac{2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{n}{(2n)^3} \right]$.

(3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin \left(\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) \pi \right)$.

(4) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \ln(n+k) - \frac{n+1}{2n} \ln n \right)$.

二、(20 分) 计算下列各题并适当化简

(1) 设 $y = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 计算下列函数的二阶导数

$$y = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(3) 设 $y = \int_{\cot x}^{\tan x} \sqrt{1+t^2} dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(4) 设 $F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$, 其中 $f(x) = x^n(1-x)^n$, 求 $\frac{d}{dx} (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)$.

三、(15 分) 计算下列不定积分

(1) $\int \sqrt{1+x^2} dx$.

(2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x + e^{-x}} dx$.

(3) 设 $y = y(x)$ 是方程 $y^2(x-y) = x^2$ 所确定的函数, 计算 $\int \frac{1}{y^2} dx$.

四、(10 分) 试确定实数 a 与 b 的值使得函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

成为整个实数域上的连续函数。

五、(15 分) 计算定积分

(1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$.

$$(2) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^x} dx.$$

$$(3) \int_0^\pi f(x) dx, \text{ 其中 } f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt.$$

六、(10分) 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的黎曼可积函数, 求极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

七、(10分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的连续函数, $f(0) = 0$, 当 $x > 0$ 时, $0 < f(x) < x$.

令

$$a_1 = f(1), a_2 = f(a_1), \dots, a_n = f(a_{n-1}), \quad n = 2, 3, \dots.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$