

高等数学 C 2024-2025 秋季学期期中试题

1. (30 分) 求极限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{100 + \frac{1}{n}};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \sqrt[n]{n+1} - \sin \sqrt{n});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x^2}{x^2};$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x})^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

2. (10 分) 求函数 $y = \arctan(1 + \sin x) + (1 + x^2)^{x^3}$ 的一阶导数 y' .

3. (10 分) 设由参数方程

$$\begin{cases} x = 2t - \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$$

确定的函数 $y(x)$, 求二阶导数 y'' .

4. (10 分) 设

$$f(x) = \begin{cases} \ln \left(1 + x^2 \sin \frac{1}{x^2}\right), & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

问右极限 $f(0+0)$ 、右导数 $f'(0+0)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x)$ 是否存在? 说明理由。

5. (10 分) 证明: 方程 $\ln(2 + \cos x) - \frac{1}{x} = 0$ 有无穷多个正根。

6. (10 分) 求内接于椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a, b > 0$) 且底边平行于 x 轴的最大等腰三角形的面积。

7. (10 分) 证明: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e$, 其中 $x > 0$.

8. (10 分) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 上可导。若对一点 $x_0 \in (a, b)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ 存在, 则证明:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = f'(x_0).$$