北京大学数学科学学院期末考试参考答案

2020 - 2021 学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1　　考试时间 2021年 1 月14 日上午

姓　　名 ________　　学　　号 ____________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1.(15分) （极限题） 下面的极限存在吗？ 如果存在，求出极限值。 如果不存在，写出理由。

（1） （5分） $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos\ x\ -\ 2\ +\ x^2}{x^4}$

（2） （5分） 二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5\ y^3}{x^8\ +\ y^8}$

（3） （5分） 二元函数的极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+\sin y)\ \cos\frac{1}{|x|\ +\ |y|}$

参考答案:

（1） 存在。 用泰勒展开 (或多次洛必达法则） 得

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos\ x - 2 + x^2}{x^4} = \frac{1}{12}$$

（2） 不存在。 理由： 当 $y = x$ ，沿此条路迳的极限值是 $\frac{1}{2}$. 当 $y = -x$ ，沿此条路迳的极限值是 $-\frac{1}{2}$. 两者不相等，所以此二元函数的极限不存在。

（注：也可以用其他路迳。）

（3） 存在。

$$-x - \sin y\ \le\ (x+\sin y)\ \cos\frac{1}{|x|\ +\ |y|}\ \le\ x+\sin y$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (-x-\sin y)\ =\ -\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ -\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin y = -0 - \sin 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+\sin y)\ =\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} x\ +\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin y = 0 + \sin 0 = 0$$

用二元函数极限的夹逼定理得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+\sin y)\ \cos\frac{1}{|x|\ +\ |y|} = 0$$

2.(15分) （极值题） 求出闭区间 $[-1,1]$ 上的一元函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到 最小值的所有 $[-1,1]$ 上的点。

参考答案:

（1） 连续 函数 $f(x)$ 在 闭区间 $D = [-1,1]$上 必达到 最小值 m 。因此

$$E\ =\ \{\ a\ \in\ [-1,1]\ \mid\ f(x) = m\ \}$$

是一个 非空 集合。 任取 $a\ \in\ E$ ， a 可能是 D 的 边界点， 也可能是 $f(x)$ 的 不可导的点， 也可能是 $f(x)$ 的 稳定点。

（2） 在闭区间 $D = [-1,1]$ 的 边界点上

$$f(-1) = 1\quad ,\quad f(1) = 1$$

（3） 计算导数

$$f'(x) \;=\; \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}} \;-\; \frac{2}{3}\,x\,(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$$

（4） $f(x)$ 在 $D=[-1,1]$ 的内点 $x=0$ 处 不可导， $f(0)=1.$

（5） 求 $f(x)$ 的 稳定点: 解

$$f'(x)=0$$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$x^{-\frac{4}{3}}=(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}$$

$$x^4=(x^2-1)^2$$

$$x^2=x^2-1\,(\text{不可能}) \qquad \text{或} \quad x^2=1-x^2$$

$$2x^2=1$$

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}\;\;\geq\;\;1=f(0)=f(-1)=f(1)$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4}\;\;\geq\;\;1=f(0)=f(-1)=f(1)$$

（6） E 是一个 非空 集合。 因此（1）（2）（4）（5） 推出:

$$E=\{-1\,,\;0\,,\;1\}$$

即， $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值 1 的 所有 $[-1,1]$ 上的点 是

$$-1\,,\;0\,,\;1$$

3.(20分) （泰勒多项式题）

（1）（15分） 设 $a,\,b$ 是实数, $b\neq 0$. 求出二元函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 (a,b) 处的二阶泰勒多项式。

（2）（5分）设 $a<b,\;n$ 为正整数， 函数 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 在 (a,b) 中每点都有 $(n+1)$ 阶导数，定义二元函数 $T:\,(a,b)\times(a,b)\to\mathbb{R}$ 为

$$T(x,y)\;=\;f(x)-f(y)\;-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k$$

求出 $T(x,y)$ 对 y 的一阶偏导函数 $\frac{\partial T(x,y)}{\partial y}$.

参考答案:

（1）

（1.1） $\arctan\frac{x}{y}$ 在给定点 (a,b) 的二阶 泰勒多项式是 $\arctan\frac{a}{b}+\frac{1}{1}df(a,b)+\frac{1}{2}d^2f(a,b)$

（1.2） $df(a,b)=\frac{1}{a^2+b^2}(b(x-a)-a(y-b))$

（1.3） $d^2f(a,b)=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-2ab(x-a)^2+2(a^2-b^2)(x-a)(y-b)+2ab(y-b)^2)$

（1.4） $\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(1,1)$ 处的二阶泰勒多项式是

$$\arctan\frac{a}{b}+\frac{1}{a^2+b^2}(b(x-a)-a(y-b))+\frac{1}{(a^2+b^2)^2}(-2ab(x-a)^2+2(a^2-b^2)(x-a)(y-b)+2ab(y-b)^2)$$

（2）
$T(x,y)$ 对 y 的一阶偏导函数

$$\frac{\partial T(x,y)}{\partial y} = -\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n$$

4.(10分) （隐函数题） 证明： 对任意 给定 的实数 p， 存在点 1 的开邻域 U , 存在点 1 的开邻域 W ， 存在唯一的函数 $y=f(x)$ ， $x \in U$， $f(x) \in W$ 满足 方程 $x^p+y^p-2xy=0$.

参考答案： 设 $F(x,y)=x^p+y^p-2xy$. 则

（1） $F(1,1)=0$.

（2） 当 $p \neq 2$ 时， 有 $F_y(1,1)=py^{p-1}-2x|_{(1,1)}=p-2 \neq 0$. 用隐函数定理。

（3） 当 $p=2$ 时， 有 $x^p+y^p-2xy=x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=0$ 等价于 $y=x$.

5.(15分) （应用题） 设在空间 $\mathbb{R}^3$ 中 Oxy 平面之外的点 (x,y,z) 处的电势 $V = (\frac{2y}{z})^x$. 求出在点 (1, $\frac{1}{2}$, 1) 处， 电势 V 下降最快 的方向上的单位向量。

参考答案:

（1）

$$V_x|_{(1,\frac{1}{2},1)} = (\frac{2y}{z})^x \ \ln(\frac{2y}{z}) \ |_{(1,\ \frac{1}{2},\ 1)} = 0$$

（2）

$$V_y|_{(1,\frac{1}{2},1)} = x\,(\frac{2y}{z})^{x-1} \ \frac{2}{z} \ |_{(1,\ \frac{1}{2},\ 1)} = 2$$

（3）

$$V_z|_{(1,\frac{1}{2},1)} = x\,(\frac{2y}{z})^{x-1}\,(-\frac{2y}{z^2}) \ |_{(1,\ \frac{1}{2},\ 1)} = -1$$

（4）

$$E = grad\,V|_{(1,\ \frac{1}{2},\ 1)} = (\ V_x|_{(1,\frac{1}{2},1)},\ V_y|_{(1,\frac{1}{2},1)},\ V_z|_{(1,\frac{1}{2},1)}\ ) = (\ 0\ ,\ 2,\ -1\ )$$

(5) 在点 (1, $\frac{1}{2}$, 1) 处， 电势 V 下降最快 的方向上的单位向量是

$$-\frac{E}{|E|} = (\ 0\ ,\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{5}}\ )$$

6.(25分) （空间解析几何与多元函数综合题） 设空间 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 K : $x+2y+3z=6$ 与 x 轴， y 轴， z 轴分别交于三点 A, B, C . $\mathbb{R}^3$ 中一个动点 H 与平面 K 保持恒定的距离 1 ， H 在平面 K 上的 垂直投影 记为 M . 假设 M 是在以 A, B, C 为 顶点 的三角形 ΔABC 之中， M 到三条边 BC， CA ， AB 的 距离 分别记为 p, q, r .

（1） （5分） 求出三角形 ΔABC 的面积。

（2） （5分） 用 p, q, r 表示以 A, B, C, H 为 四个顶点 的 四面体的 表面积 $S(p,q,r)$.

（3） （5分） 写出变量 p, q, r 必须满足的 约束条件。

（4） （10分） 求出以 p, q, r 为变量的函数 $S(p,q,r)$ 的 条件极值的稳定点。

参考答案:

（1）

$$A=(6,0,0)\ ,\ \ B=(0,3,0)\ ,\ \ C=(0,0,2)$$

$$\begin{aligned}&(B-A)\times(C-A)\ =(-6,3,0)\times(-6,0,2)\\&=(-6i+3j)\times(-6i+2k)=6i+12j+18k\end{aligned}$$

三角形 ΔABC 的面积是

$$\frac{1}{2}\,|\,(B-A)\times(C-A)\,|\ =\ \frac{1}{2}\sqrt{6^2+12^2+18^2}\ =\ 3\sqrt{14}$$

（本小题也可以用其他方法。例如： 方法2：求出三角形 ABC 的某二边长，用点乘求此两边的夹角，再用面积公式。 方法3：求出三角形 ABC 的三边长，再用海伦公式。）

（2）三角形 ABC 的三边长

$$BC\text{ 的长 }=\ |C-B|\ =\ |(0,-3,2)|\ =\ \sqrt{(-3)^2+2^2}\ =\ \sqrt{13}$$

$$CA\text{ 的长 }=\ |A-C|\ =\ |(6,0,-2)|\ =\ \sqrt{6^2+(-2)^2}\ =\ \sqrt{40}\ =\ 2\sqrt{10}$$

$$AB\text{ 的长 }=\ |B-A|\ =\ |(-6,3,0)|\ =\ \sqrt{(-6)^2+3^2}\ =\ \sqrt{45}\ =\ 3\sqrt{5}$$

以 A, B, C, H 为 四个顶点 的 四面体的 表面积是

$$S(p,q,r)\ =\ 3\sqrt{14}\ +\ \frac{1}{2}\sqrt{13}\sqrt{1+p^2}\ +\ \frac{1}{2}\,2\sqrt{10}\sqrt{1+q^2}\ +\ \frac{1}{2}\,3\sqrt{5}\sqrt{1+r^2}$$

$$=\ 3\sqrt{14}\ +\ \frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{1+p^2}\ +\ \sqrt{10}\sqrt{1+q^2}\ +\ \frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{1+r^2}$$

（3）变量 p, q, r 必须满足的 约束条件是 $\frac{1}{2}\sqrt{13}\,p+\frac{1}{2}\,2\sqrt{10}\,q+\frac{1}{2}\,3\sqrt{5}\,r=3\sqrt{14}$ ，即：

$$\sqrt{13}\ p\ +\ 2\sqrt{10}q\ +\ 3\sqrt{5}\,r-6\sqrt{14}\ =\ 0$$

（4）

（4.1） 用 Lagrange 乘数法则，定义辅助函数

$$V(p,q,r,\lambda)\ =\ S(p,q,r)\ +\ \lambda(\sqrt{13}\,p\ +\ 2\sqrt{10}\,q\ +\ 3\sqrt{5}\,r-6\sqrt{14})$$

$$=\ 3\sqrt{14}+\frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{1+p^2}+\sqrt{10}\sqrt{1+q^2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{1+r^2}+\lambda(\sqrt{13}\,p+2\sqrt{10}\,q+3\sqrt{5}\,r-6\sqrt{14})$$

（4.2） $S(p,q,r)$ 条件极值的稳定点 (p_0,q_0,r_0) 来自于辅助函数 $V(p,q,r,\lambda)$ 的稳定点 (p_0,q_0,r_0,λ_0)：

$$\frac{\sqrt{13}}{2}\frac{p_0}{\sqrt{1+p_0^2}}+\lambda_0\sqrt{13}\ =\ 0$$

$$\sqrt{10}\frac{q_0}{\sqrt{1+q_0^2}}+\lambda_0\,2\sqrt{10}\ =\ 0$$

$$\frac{3\sqrt{5}}{2}\frac{r_0}{\sqrt{1+r_0^2}}+\lambda_0\,3\sqrt{5}\ =\ 0$$

$$\sqrt{13}\,p_0\ +\ 2\sqrt{10}\,q_0\ +\ 3\sqrt{5}\,r_0-6\sqrt{14}\ =\ 0$$

因此

$$-2\lambda_0 \;=\; \frac{p_0}{\sqrt{1+x_0^2}} \;=\; \frac{q_0}{\sqrt{1+y_0^2}} \;=\; \frac{r_0}{\sqrt{1+z_0^2}}$$

（4.3） 因为

$$(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}})' \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + t\frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} \;=\; \frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0$$

所以 $\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ 是 t 的 严格 单调上升函数，因此（4.2）可以推出

$$p_0 \;=\; q_0 \;=\; r_0$$

（4.4） 上式代入

$$\sqrt{13}\,p_0 \;+\; 2\sqrt{10}\,q_0 \;+\; 3\sqrt{5}\,r_0 - 6\sqrt{14} \;=\; 0$$

得

$$p_0 \;=\; q_0 \;=\; r_0 \;=\; \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13} \;+\; 2\sqrt{10} \;+\; 3\sqrt{5}}$$

所以，以 p, q, r 为变量的函数 $S(p, q, r)$ 的 条件极值的稳定点 只有一个

$$\left(\frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13} + 2\sqrt{10} + 3\sqrt{5}} \,,\; \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13} + 2\sqrt{10} + 3\sqrt{5}} \,,\; \frac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13} + 2\sqrt{10} + 3\sqrt{5}} \right)$$