北京大学数学科学学院2021-22(1)“高等数学B1”期末试题答案

姓名____________________ 学号____________________ 共 7 道大题

在下面试题中, $\mathbb{R}$ 记实数域， $\mathbb{R}^n$ 记标准的 n 维欧氏空间。

1.(10分) 证明：任给 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $\theta(x) \in (0,1)$ 使得

$$\arctan\ x \ = \ \frac{x}{1\ +\ (\ \theta(x)\ )^2\ \ x^2} \quad .$$

参考答案:

（1）. 对于任意给定的 $x\ >\ 0$, t 的函数 $\arctan t$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 可导。用微分中值定理得存在 $\theta(x) \in (0,1)$ 使得

$$\arctan\ x\ \ - \arctan\ 0 \ = \ (\arctan\ t)'\Big|_{t=0+\theta(x)}\ \ (\ x\ -\ 0\ )$$

即

$$\arctan\ x \ = \ \frac{x}{1\ +\ (\ \theta(x)\ x\ )^2} \ = \ \frac{x}{1\ +\ (\ \theta(x)\ )^2\ x^2}$$

（2） 对于任意给定的 $x < 0$, 定义

$$\theta(x) \ = \ \theta(-x)$$

因此

$$\arctan\ x \ \ = -\ \arctan\,(-x) \ = \ -\frac{-\,x}{1\ +\ (\theta(-x)\ )^2\ (-x)^2} \ = \ \frac{x}{1\ +\ (\theta(x)\ )^2\ x^2}$$

（3） 对于任意给定的 $x = 0$, 定义

$$\theta(0) \ = \ 0$$

因此

$$\arctan\ 0 \ = \ \frac{0}{1\ +\ (\theta(0))^2\ 0^2}$$

2.(20分) 未定式的极限。

（1）.(10分) 求出

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^4 x}{\sqrt{\ 1 - \frac{x\ \sin x}{2}\ } \ - \ \sqrt{\cos x}} \quad .$$

（2）.(10分) 设 n 是任给的正整数，对于每个 $1 \le k \le n$, a_k 是任给的 正 实数。 求出

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} \quad .$$

参考答案:

（1）. 比较快的途径是 用已知的标准极限值，和 局部泰勒公式：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^4 x}{\sqrt{\ 1 - \frac{x\ \sin x}{2}\ } \ - \ \sqrt{\cos x}}$$

$$= \ \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1 - \frac{x\ \sin x}{2}\ -\ \cos x} \ \cdot \ (\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}\ )^4 \ \cdot \ \lim_{x\to 0} (\sqrt{\ 1 - \frac{x\ \sin x}{2}\ } \ + \ \sqrt{\cos x}\ )$$

$$= \ \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2\ -\ \frac{x}{2}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))\ \ -\ \ (\ 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4))} \ \cdot\ 1 \quad \cdot (\sqrt{\ 1 - \frac{0\ \sin 0}{2}\ } \ + \ \sqrt{\cos 0}\ )$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{\frac{1}{24}x^4 + o(x^4)} \cdot 1 \cdot 2 = \lim_{x\to 0} \frac{1+o(1)}{\frac{1}{24}+o(1)} \cdot 2 = 12 .$$

即

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^4 x}{\sqrt{1-\frac{x\ \sin x}{2}} - \sqrt{\cos x}} = 12 .$$

（本小题也可两次用洛必达法则，分子用 $(x^4)'' = 12x^2$ 来降次 .）

（2）. 因为指数函数是连续的， 所以

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^x}{n}}{x}}$$

用 洛必达法则(或基本的导数的定义） 计算：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^x}{n}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\ln \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^x}{n}\right)'}{(\,x\,)'} = \lim_{x\to 0} \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^x \ \ln a_k \right)$$

$$= \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^0} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^0 \ \ln a_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \ln a_k$$

所以

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln a_k} = \prod_{k=1}^{n} a_k .$$

3.(15分) 设正整数 $n \geq 2$. 求出

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 5x^2}{(1 - 2x)\,(1 + x^2)}$$

在 $x = 0$ 点的 $(2n+1)$ 阶局部泰勒公式。

参考答案:

（1） 用观察法 或 待定系数法 得到 $f(x)$ 的 部分分式分解：

$$f(x) = \frac{1-2x+5x^2}{(1-2x)(1+x^2)} = = \frac{1+x^2-2x+4x^2}{(1-2x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{1+x^2}{(1-2x)(1+x^2)} + \frac{-2x+4x^2}{(1-2x)(1+x^2)} = \frac{1}{1-2x} + \frac{-2x}{1+x^2}$$

（2） 第一部分的展开

$$\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^4 + 2^5x^5 + \cdots + 2^{2n}x^{2n} + 2^{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

（3） 第二部分的展开

$$\frac{-2x}{1+x^2} = -2x\,(\,1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n}\,)\,)$$

$$= -2x + 2x^3 - 2x^5 + \cdots + 2(-1)^{n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

（4） 合成

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{-2x}{1+x^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \quad 1+0+2^2x^2 \ + \ (2^3+2)x^3 \ + \ 2^4x^4 \ + \ (2^5-2)x^5 \\
&+\cdots \ + \ 2^{2n}\, x^{2n} \ + \ (\, 2^{2n+1}+2(-1)^{n+1}\,)\, x^{2n+1} \ + \ o(x^{2n+1}) \\
&= \quad 1+\sum_{k=1}^{n} (\, 2^{2k}x^{2k} \ + \ (\, 2^{2k+1}+2(-1)^{k+1}\,)\, x^{2k+1}\,) \ + \ o(x^{2n+1})
\end{aligned}
$$

(注：本题中的正负号需要细心对上正确位置。学生有可能不小心而出错。如果最后的表达式不完全对，只要思路正确，可以给部分分数。改卷的助教们要协调好各自给分标准的前后一致。）

4.(10分) 定义三元函数 $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 为

$$
f(x,y,z) \ = \ \begin{cases} \frac{x\,y\,z}{x^2+y^2+z^2} & \text{当} \ (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{当} \ (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}
$$

（1）.(6分) 计算出 f 在点 $(0,0,0)$ 处三个偏导数 $f_x(0,0,0)$ ， $f_y(0,0,0)$ ， $f_z(0,0,0)$.

（2）.(4分) 三元函数 f 在点 $(0,0,0)$ 处可微吗？ 证明你的结论。

参考答案:

（1）. 根据定义

$$
f_x(0,0,0) \ = \ \lim_{x\to0}\frac{f(x,0,0)-f(0,0,0)}{x} \ = \ \lim_{x\to0}\frac{\frac{x\cdot0\cdot0}{x^2+0^2+0^2}-0}{x} \ = \ \lim_{x\to0} 0 \ = \ 0
$$

$$
f_y(0,0,0) \ = \ \lim_{y\to0}\frac{f(0,y,0)-f(0,0,0)}{x} \ = \ \lim_{y\to0}\frac{\frac{0\cdot y\cdot0}{0^2+y^2+0^2}-0}{x} \ = \ \lim_{y\to0} 0 \ = \ 0
$$

$$
f_z(0,0,0) \ = \ \lim_{z\to0}\frac{f(0,0,z)-f(0,0,0)}{x} \ = \ \lim_{z\to0}\frac{\frac{0\cdot0\cdot z}{0^2+0^2+z^2}-0}{x} \ = \ \lim_{z\to0} 0 \ = \ 0
$$

（2）. 三元函数 f 在点 $(0,0,0)$ 不可微。 证明如下。**反证:**

（2.1） 如果三元函数 f 在点 $(0,0,0)$ 可微，根据定义

$$
f(x,y,z) \ = \ f(0,0,0) \ + \ f_x(0,0,0)\,x \ + \ f_y(0,0,0)\,y \ + \ f_z(0,0,0)\,z \ + \ (x^2+y^2+z^2)^{\frac12}\ o(\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac12}\,)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \ 0 \ + \ 0\,x \ + \ 0\,y \ + \ 0\,z \ + \ (x^2+y^2+z^2)^{\frac12}\ o(\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac12}\,) \\
&= \ (x^2+y^2+z^2)^{\frac12}\ o(\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac12}\,)
\end{aligned}
$$

（2.2） 在上式中代入 $x=y=z\neq0$，得

$$
\frac13 x \ = \ \frac{x\,x\,x}{x^2\ +\ x^2\ +\ x^2} \ = \ f(x,x,x) \ = \ (x^2+x^2+x^2)^{\frac12}\ o(\,(x^2)^{\frac12}\,) \ = \ \sqrt3\,x\ o(x)
$$

推出

$$
\frac13 \ = \ \sqrt3\ \ o(x)
$$

推出

$$
\frac13 \ = \ \lim_{x\to0}\frac13 \ = \ \sqrt3\lim_{x\to0}\ o(x) \ = \ \sqrt3\cdot0 \ = \ 0
$$

这是个**矛盾** . 所以， 三元函数 f 在点 $(0,0,0)$ 不可微。

5.(15分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有连续的二阶导函数。任给 $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, 当 $x\neq0$ 时， 定义

$$
h(x,y) \ = \ x\,f(\frac{y}{x}) \ + \ g(\frac{y}{x}) \ .
$$

计算出

$$
x^2\ \ h_{xx}(x,y) \ + \ 2\,xy\,h_{yx}(x,y) \ + \ y^2\,h_{yy}(x,y) \ .
$$

参考答案:

$$h_x(x,y) = f(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x} f'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^2} g(\frac{y}{x})$$

$$h_y(x,y) = f'(\frac{y}{x}) + \frac{1}{x} g'(\frac{y}{x})$$

$$\begin{aligned} h_{xx}(x,y) &= \frac{-y}{x^2} f'(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x^2} f'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^3} f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x^3} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4} g''(\frac{y}{x}) \\ &= \frac{y^2}{x^3} f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x^3} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4} g''(\frac{y}{x}) \end{aligned}$$

$$h_{yx}(x,y) = -\frac{y}{x^2} f''(\frac{y}{x}) - \frac{1}{x^2} g'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^3} g''(\frac{y}{x})$$

$$h_{yy}(x,y) = \frac{1}{x} f''(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x^2} g''(\frac{y}{x})$$

合起来代入表达式

$$x\ h_{xx}(x,y) + 2xy\, h_{yx}(x,y) + y^2\, h_{yy}(x,y)$$

$$\begin{aligned} &= x^2 \left(\frac{y^2}{x^3} f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x^3} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^4} g''(\frac{y}{x}) \right) \\ &+ 2xy \left(-\frac{y}{x^2} f''(\frac{y}{x}) - \frac{1}{x^2} g'(\frac{y}{x}) - \frac{y}{x^3} g''(\frac{y}{x}) \right) \\ &+ y^2 \left(\frac{1}{x} f''(\frac{y}{x}) + \frac{y}{x^2} g''(\frac{y}{x}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{y^2}{x} f''(\frac{y}{x}) + \frac{2y}{x} g'(\frac{y}{x}) + \frac{y^2}{x^2} g''(\frac{y}{x}) \\ &- \frac{2y^2}{x} f''(\frac{y}{x}) - \frac{2y}{x} g'(\frac{y}{x}) - \frac{2y^2}{x^2} g''(\frac{y}{x}) \\ &+ \frac{y^2}{x} f''(\frac{y}{x}) + \frac{y^3}{x^2} g''(\frac{y}{x}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

所求表达式的值

$$x^2\ h_{xx}(x,y) + 2xy\, h_{yx}(x,y) + y^2\, h_{yy}(x,y) = 0$$

6.(20分) 设

$$F(x,y,z) = x^3 + (y^2-1)\, z^3 - xyz\ .$$

(1).(5分) 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(1\ ,\ 1)$ 的一个邻域 D 以及 D 上唯一的隐函数 $z = z(x,y)$ 满足 $F(\ x,\ y,\ z(x,y)\ ) \equiv 0$, $z(1,\ 1) = 1$.

(2).(5分) 求出 在点 $(1\ ,\ 1)$ 处 函数 $z(x,y)$ 的值 减少最快的方向上的 单位向量 E .

(3).(10分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x+2y-2z=1$ 的 z 分量为正的 法向量记为 N 。 向量 $(E,\ 0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中向量。 求出 N 和 $(E, 0)$ 的 夹角余弦。

参考答案:

(1). $F(x,y,z) = x^3 + (y^2-1)\, z^3 - xyz$ 在 $\mathbb{R}^3$ 上有连续的所有偏导数。

$$F(1,\ 1,\ 1) = 1^3 + (1^2-1)\, 1^3 - 1 = 0$$

$$F_z\,\big|_{(1,\ 1,\ 1)} = (y^2-1)\, 3z^2 - xy\,\big|_{(1,\ 1,\ 1)} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

根据隐函数定理，存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 (1 , 1) 的一个邻域 D 以及 D 上唯一的隐函数 $z = z(x,y)$ 满足 $F(\, x,\, y,\, z(x,y)\,) \equiv 0$, $z(1,\, 1) = 1$.

（2）.

$$F_x\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = 3x^2 - yz\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = 3-1 = 2$$

$$F_y\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = 2y\,z^3 - xz\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = 2-1 = 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = -\frac{F_x}{F_z}\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = -\frac{F_y}{F_z}\,\Big|_{(1,\,1,\,1)} = -\frac{1}{-1} = 1$$

函数 $z(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处的函数值减少最快的 方向上的 单位 向量是

$$E = -\frac{(2,\,1)}{|\,(2,\,1)\,|} = (\,-\frac{2}{\sqrt{5}}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{5}}\,)$$

（3）.

（3.1） 平面 $x+2y-2z=1$ 的 z 分量为正的 法向是 $N = (\,-1,\,-2,\,2\,)$.

（3.2） N 和 $(E,0)$ 的夹角余弦等于

$$cos < N,\ (E,0)\ > = \frac{N\ \cdot\ (E,0)}{|N|\ \ |(E,0)|} = \frac{(\,-1,\,-2,\,2\,)\cdot(\,-\frac{2}{\sqrt{5}},\,-\frac{1}{\sqrt{5}},\,0\,)}{|\,(\,-1,\,-2,\,2\,)\,|\ \ |\,(\,-\frac{2}{\sqrt{5}},\,-\frac{1}{\sqrt{5}},\,0\,)\,|}$$

$$= \frac{(\,-1,\,-2,\,\ 2\,)\cdot(\,-2,\,-1,\,0\,)}{|\,(\,-1,\,-2,\,\ 2\,)\,|\ |(\,-2,\,-1,\,0\,)\,|} = \frac{4}{3\ \sqrt{5}}$$

$$= \frac{4\,\sqrt{5}}{15}$$

7.(10分) 给定正整数 $n \geq 3$ 。求出 半径为 1 的圆的 内接 n 边形所能达到的最大面积。 （注：要求写出解答的详细过程。如果用到教材中没有明确写成定理的某个不等式，则要求写出 从教材中定义和定理出发 推出此不等式的详细过程。）

参考答案: 正整数 $n \geq 3$ 时， 半径为 1 的圆的内接 n 边形所能达到的最大面积是

$$\frac{n}{2}\ \sin\frac{2\pi}{n}\ .$$

详细 证明如下 。

（1） 设 K 是 半径为 1 的圆的 内接 n 边形， K 的 n 个边对应的 **圆心角** 为 $x_1, \cdots,\ x_n$. 它们满足 **约束条件** :

$$x_1 + \cdots + x_n = 2\pi\,, \quad x_1 \geq 0\,, \quad \cdots, \quad x_n \geq 0$$

下面要用 归纳法 证明命题 P(n) : 在上述约束条件下，K 的面积函数

$$\frac{1}{2}\ \sin x_1 + \cdots + \frac{1}{2}\ \sin x_n\ .$$

达 最大值的点 是点

$$x_1 = \cdots = x_n = \frac{2\pi}{n}$$

在此点处， K 的面积函数 达到最大值

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\ .$$

先证命题 P（3）对的。

（2） 在约束条件定义的 **有界闭集** 上，函数 $\frac{1}{2}\sin x_1+\frac{1}{2}\sin x_2+\frac{1}{2}\sin x_3$ 必有最大值点。

（3） 此最大值点 **不在边界上** 。
反证： 如果在边界上，通过重命名，可设 $x_3=0$.

$$\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3 \;=\; \sin x_1+\sin(2\pi-x_1)=\mathbf{0}$$

不可能 为 P(3) 中最大值。

（4） 因此，此最大值点 **必为内点** 。 所以，通过 约束条件下条件极值问题的 拉格朗日乘数法则 的方程组:

$$\begin{aligned}
(\ \sin x_1+\sin x_2+\sin x_3 \ +\ \lambda\,(\,x_1+x_2+x_3-2\pi)\ )_{x_1} &= \cos x_1+\lambda \;=\; 0\\
(\ \sin x_1+\sin x_2+\sin x_3 \ +\ \lambda\,(\,x_1+x_2+x_3-2\pi)\ )_{x_2} &= \cos x_2+\lambda \;=\; 0\\
(\ \sin x_1+\sin x_2+\sin x_3 \ +\ \lambda\,(\,x_1+x_2+x_3-2\pi)\ )_{x_3} &= \cos x_3+\lambda \;=\; 0
\end{aligned}$$

$$x_1+x_2+x_3 \;=\; 2\pi\,,\quad x_1\;\geq\;0\,,\;x_2\;\geq\;0\,,\;x_3\;\geq\;0$$

推出

$$\cos x_1 \;=\; \cos x_1 \;=\; \cos x_3$$

$$x_1+x_2+x_3 \;=\; 2\pi\,,\quad x_1\;\geq\;0\,,\;x_2\;\geq\;0\,,\;x_3\;\geq\;0$$

推出唯一解

$$x_1 \;=\; x_2 \;=\; x_3 \;=\; \frac{2\pi}{3}$$

此时函数

$$\frac{1}{2}\sin x_1+\frac{1}{2}\sin x_2+\frac{1}{2}\sin x_3 \;=\; \frac{3}{2}\;\sin\,\frac{2\pi}{3}$$

上面（2）（3）（4）合起来推出 **P（3）是对的。**

下面证明：假设命题 P（n）是对的，则命题 P （n+1）也是对的 。

（5） 在约束条件定义的 **有界闭集** 上，函数

$$\frac{1}{2}\sin x_1\;+\;\cdots\;+\;\frac{1}{2}\sin x_n$$

必有最大值点。

（6） 命题 P(n+1) 中最大值点 **不在边界上** 。
反证： 如果命题 P(n+1) 中最大值点在边界上，通过重命名，可设 $x_{n+1}=0$ 。**当** $x_{n+1}=0$ **时的命题 P （n+1）就是命题 P(n)** 。 归纳假设命题 P(n) 是对的 推出 在边界上达的最大值是 $\frac{n}{2}\,\sin\,\frac{2\pi}{n}$.
这矛盾于：

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$$

小于 命题 P(n+1) 中 当 $x_1=\cdots=x_{n+1}=\frac{2\pi}{n+1}$ 的值

$$\frac{n+1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1}$$

即

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\;<\;\frac{n+1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1}$$

这个关键不等式的 证明如下：

（7）

（7.1）当 $1<x\leq 2$ 时， $\cos\frac{\pi}{x}\leq 0$ 推出

$$\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x}\;\geq\;\sin\frac{\pi}{x}\;>\;0$$

（7.2）当 $2 < x$ 时， $\cos\frac{\pi}{x} \ > \ 0,$ 又 $\frac{\pi}{2} \ > \ \frac{\pi}{x} \ > \ 0$ 推出

$$\tan\frac{\pi}{x} \ > \ \frac{\pi}{x}$$

（此不等式的**证明如下**：当 $\frac{\pi}{2} \ > \ t \ > 0$，导数 $(\tan\ t-t)' \ = \ sec^2\,t-1 \ = \ \frac{1}{\cos^2 t}-1 \ > \ 0$，推出 $\tan\ t-t \ > \ \tan\ \frac{t}{2}-\frac{t}{2} \ \geq \ \lim_{t\to 0}(\ \tan\frac{t}{2}-\frac{t}{2}\ ) \ = \ 0$.）

因此当 $2 < x$ 时，有

$$\sin\frac{\pi}{x} \ - \ \frac{\pi}{x}\ \cos\frac{\pi}{x} \ \ = \ \ \cos\frac{\pi}{x}\,(\ \tan\frac{\pi}{x} \ - \ \frac{\pi}{x}\ ) \ > \ 0$$

(7.3) 上面（7.1）（7.2）合起来推出 当 $x > 1$ 时， $x\sin\frac{\pi}{x}$ 的导函数

$$\sin\frac{\pi}{x}-\frac{\pi}{x}\cos\frac{\pi}{x} \ > \ 0$$

因此当 $x > 1$ 时， $x\sin\frac{\pi}{x}$ **是严格增函数**。条件 $n \geq 3$ 推出 $\frac{n+1}{2} \ > \ \frac{n}{2} \ > \ 1$, 因此**上面（6）用到的关键不等式**

$$\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n} \ < \ \frac{n+1}{2}\sin\frac{2\pi}{n+1}$$

得证。

（8） 上面（6）推出 $\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ 不是 P(n+1)中的最大值点。因此， P(n+1)中的最大值点 **必为内点**。 所以，通过 约束条件下条件极值问题的 拉格朗日乘数法则 的方程组: 对于每个 $j=1,\cdots,n+1,$

$$(\ \ \sin x_1 \ + \ \cdots \ + \ \sin x_{n+1} \ + \ \lambda\,(\ x_1 \ + \ \cdots \ + \ x_{n+1}-2\pi)\ \ )_{x_j} \ \ = \ \ \cos x_j \ + \ \lambda \ = \ 0$$

$$x_1 \ + \ \cdots \ + \ x_{n+1} \ = \ 2\pi\ , \quad x_1 \ \geq \ 0\ , \ x_{n+1} \ \geq \ 0$$

推出

$$\cos x_1 \ = \ \cdots \ = \ \cos x_{n+1}$$

$$x_1 \ + \ \cdots \ + \ x_{n+1} \ = \ 2\pi\ , \quad x_1 \ \geq \ 0\ ,\cdots \ x_{n+1} \ \geq \ 0$$

推出唯一解

$$x_1 \ = \ \cdots \ = \ x_{n+1} \ = \ \frac{2\pi}{n+1}$$

此时函数

$$\frac{1}{2}\sin x_1 \ + \ \cdots \ + \ \frac{1}{2}\ \sin x_{n+1} \ = \ \frac{n+1}{2}\ \ \sin\ \frac{2\pi}{n+1}$$

上面（5）（6）（8）合起来推出 **P（n+1）是对的**。