北京大学数学科学学院期末试题

2022 - 2023 学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1

姓　　名 ________　　　　**学　　号** ________

本试题共 9 **道大题，满分** 100 **分**

1.(10分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x+3y+2z=6$ 与 x 轴交点为 A， 与 y 轴交点为 B， 与 z 轴交点为 C .

（1）（5分）. 求三角形 ΔABC 的面积。

（2）（5分）. 求过四点 $A,\ B,\ C$, 原点 $(0,0,0)$ 的球面的方程。

2.(15分) 下面二元函数的极限存在吗？如果存在，求出极限值； 如果不存在，写出理由。

（1）（5分）. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{24\ \cos\sqrt{x^2+y^2}\ -\ 24\ +\ 12\ (x^2+y^2)}{(\ \tan\sqrt{x^2+y^2}\ \ )^4}$

（2）（5分）. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\ x+\ln(1+y)\ )\ \cos\frac{1}{x^2\ +\ y^2}$

（3）（5分）. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\ \sin y}{(\sin x)^2\ +\ (\sin y)^2}$

3.(10分) 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有连续的二阶导函数。对于任何 $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, 当 $x\neq 0$ 时， 定义 $h(x,y)\ =\ x\,g(\frac{y}{x})+f(\frac{y}{x})$. 计算出 $x^2\ h_{xx}(x,y)+2\,xy\,h_{yx}(x,y)\ +y^2\,h_{yy}(x,y)$.

4.(10分) 求 $\mathbb{R}^2$ 中曲线 $e^{x\,y}\ +\ xy\ +\ y^2\ =\ 2$ 在点 (0 , 1) 处 的切线方程。

5.(10分) 设三元函数 $f(x,y,z)\ =\ (\frac{2x}{z})^y$, 这里 $z\neq 0$. 求 $f(x,y,z)$ 在点 ($\frac{1}{2}$, 1, 1) 处下降最快的方向上的单位向量。

6.(10分) 求二元函数 $f(x,y)=\ \arctan\frac{y}{x}$ 在点 (2 , 2) 处的二阶泰勒多项式。

7.(10分) 求函数 $f(x)=\ (\sin x)^{\frac{2}{3}}\ +\ (\cos x)^{\frac{2}{3}}$ 在闭区间 $[\,-\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{\pi}{2}\,]$ 上的最小值，并指明所有最小值点。

8.(10分) 证明：任意给定实数 k， 存在点 0 的开邻域 U , 存在点 0 的开邻域 W ， 存在唯一的函数 $y=f(x)$, $x\in U$, $y\in W$ 满足方程 $e^{kx}\ +\ e^{ky}\ -\ 2\,e^{x+y}\ =\ 0$.

9.(15分) 设 r 是正实数，$D\ =\ \{(x,y)\ \in\ \mathbb{R}^2\ |\ \sqrt{x^2+y^2}\ <\ r\}$, $f\ :\ D\ \to\ \mathbb{R}$, $f\ \in\ C^3(D)$, $f(0,0)\ =\ 0$, f 在点 $(0,0)$ 处的一阶全微分 $df(0,0)\ =\ 0$, $E,\ F,\ G$ 都是常数， f 在点 $(0,0)$ 处的二阶微分

$$d^2f(0,0)\ \ =\ \ E\,(\triangle x)^2\ +\ 2\,F\,\triangle x\,\triangle y\ +\ G\,(\triangle y)^2\ \ .$$

（1）（10分）. 证明: 存在 D上的两个函数 $a:D\to\mathbb{R}$, $b:D\to\mathbb{R}$ 使得任取 $(x,y)\in D$ 有

$$f(x,y)\ \ =\ \ x\,a(x,y)\ +\ y\,b(x,y)\quad ,\quad a(0,0)\ \ =\ \ 0\ \ ,\quad b(0,0)\ \ =\ \ 0\ \ .$$

（2）（5分）. 如果 $E\ >\ 0$, $E\,G\ -\ F^2\ <\ 0$, 则在 $\mathbb{R}^3$ 中点 $(0,0,0)$ 的充分小邻域中，曲面 $z=f(x,y)$ 充分近似于哪类二次曲面？ 画出此类二次曲面的草图。 从此类二次曲面的几何形状来判断是否存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(0,0)$ 的充分小邻域 D_1 ，存在 D_1 上的 一对一的 C^1 变量变换 $x\ =\ x(u,v)$, $y\ =\ y(u,v)$ 使得

$$f\ (\ x(u,v)\ ,\ y(u,v)\ )\ \ =\ \ u^2\ -\ v^2\ \ .$$