北京大学数学科学学院2023-24(1)“高等数学B1”期末参考答案

姓名____________________ 学号____________________ 共 9 道大题

1.(10分) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\,x\;-\;\int_0^x\sqrt{1+t^2}\;dt\,\right)}{x^3}$$

参考答案:

（1）（**2分**）. 用变量**代换**

$$\mathbf{y=\;x\;-\;\int_0^x\sqrt{1+t^2}\;dt}$$

$$L\;=\;\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\,x\;-\;\int_0^x\sqrt{1+t^2}\;dt\,\right)}{x^3}\;=\;\lim_{y\to 0}\frac{\sin\;y}{y}\;\;\lim_{x\to 0}\frac{x\;-\;\int_0^x\sqrt{1+t^2}\;dt}{x^3}$$

（2）（**2分**）. 因为

$$\lim_{\mathbf{y}\to \mathbf{0}}\frac{\sin\;\mathbf{y}}{\mathbf{y}}\;=\;1$$

所以

$$L\;=\;\mathbf{1}\times\lim_{x\to 0}\frac{x\;-\;\int_0^x\sqrt{1+t^2}\;dt}{x^3}$$

（3）（**3分**）. 用 **洛必达** 法则　和

$$\left(\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{1+t^2}}\;\mathbf{dt}\,\right)'\;=\;\sqrt{\mathbf{1+x^2}}$$

推出

$$L\;=\;\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{1}\;-\;\sqrt{1+x^2}}{\mathbf{3x^2}}$$

（4）（**3分**）. 用在 0点的局部 **泰勒** 展开.

$$\begin{aligned}L\;&=\;\lim_{x\to 0}\frac{1\;-\left(\;\mathbf{1}\;+\;\mathbf{\tfrac{1}{2}x^2}\;+\;\mathbf{o(x^2)}\;\right)}{3x^2}\\&=\;\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2-o(x^2)}{3x^2}\;=\;\frac{-\frac{1}{2}}{3}\;-\;\mathbf{0}\\&=\;-\,\mathbf{\frac{1}{6}}\end{aligned}$$

（注：用其他方法也可以。）

2.(10分) 设函数 $f:[\,0\,,\,7\,]\to\mathbb{R}$ 为 $f(x)\;=\;x^3\;-\;6x^2\;+\;9x\;-\;1$． 区间 $[\,a\,,\,b\,]$ 是 $f(x)$ 的严格单调区间 指的是 $0\;\le\;a\;<\;b\;\le\;7$ 并且 f 限制在 $[\,a\,,\,b\,]$ 上是严格单调的。 求出 $f(x)$ 的长度为最大的严格单调区间。

参考答案:

（1）（**2分**）.

$$f'(x)\;=\;3x^2-12x+9\;=\;3(x^2-4x+3)\;=\;\mathbf{3(x-1)(x-3)}$$

（1）（**2分**）. 在 $(0,\,1)$ 上， $\mathbf{f'(x)\;>\;0}$, 又 f 在 0 点、 1 点连续，因此 f 限制在 $[0,\,1]$ 上是严格单调（上升）的。

（2）（**2分**）. 在 $(1,\,3)$ 上， $\mathbf{f'(x)\;<\;0}$, 又 f 在在 1 点、 3 点连续，因此 f 限制在 $[1,\,3]$ 上是严格单调（下降）的。

（3）（**2分**）. 在 $(3,\,7)$ 上， $\mathbf{f'(x)\;>\;0}$, 又 f 在在 1 点、 3 点连续，因此 f 限制在 $[3,\,7]$ 上是严格单调（上升）的。

（4）（**2分**）．$[0,\ 1]$ 的长度是 1，　$[1,\ 3]$ 的长度是 2，　$[3,\ 7]$ 的长度是 4 .
所以 $f(x)$ 的长度为 **最大的严格单调区间是** $[\mathbf{3},\ \mathbf{7}]$.

3.(10分) 设欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 T 的方程是 $2x - y + 3z = 6$. 平面 T 与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次记为 $A,\ B,\ C$. 以原点 $(0,0,0)$ 为中心、与平面 T 相切的球面记为 S .
（1）（5分）. 求 三角形 ΔABC 的面积。
（2）（5分）. 求 平面 T 与 球面 S 相切点 的坐标。

参考答案:

（1）（**5分**）.

（1.1）（**3分**）.

$$\mathbf{A} = (\mathbf{3},\mathbf{0},\mathbf{0})\ ,\ \mathbf{B} = (\mathbf{0},-\mathbf{6},\mathbf{0})\ ,\ \mathbf{C} = (\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{2})$$

（1.2）（**1分**）.

$$(A-B)\times(A-C) \ = \ (3,6,0)\times(3,0,-2)$$
$$= \ (3i-6j)\times(3i-2k) \ = \ \mathbf{6\,j} \ + \ \mathbf{18\,k} \ + \ \mathbf{12\,i}$$

（1.3）（**1分**）. 三角形 ΔABC 的 **面积** 是

$$\frac{1}{2}\,|\,(A-B)\times(A-C)\,| \ = \ \frac{1}{2}\sqrt{6^2+18^2+12^2} \ = \ \mathbf{3\sqrt{14}}$$

（2）（**5分**）.

（2.1）（**2分**）. 设平面 T 与球面 S 相切点为 (a,b,c) . 则从原点到切点的向量 (a,b,c) 与平面 T 的 法向 $n=(2,-1,3)$ **平行** 。因此存在 t 使得

$$\mathbf{a} \ = \ \mathbf{2\,t}\ , \quad \mathbf{b} \ = \ -\,\mathbf{t}\ , \quad \mathbf{c} \ = \ \mathbf{3\,t}$$

（2.2）（**2分**）. 切点 (a,b,c) 在 **平面** T **上**. 因此

$$2a-b+3c \ = \ 6$$

把上面（2.1）代入得到

$$4t+t+9t \ = \ 6$$
$$\mathbf{t} \ = \ \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$$

（2.3）（**1 分**）. 把（2.2）代入（2.1）得到平面 T 和球面 S **相切点** 的坐标是

$$(\ a\ ,\ b\ ,\ c\ ) \ = \ (\ \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{7}}\ ,\ \ -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\ ,\ \ \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}}\ )$$

（注：用其他方法也可以。）

4.(10分) 设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z) \ = \ z^{\mathbf{3}} \ + \ z\,e^x \ - \ y \ = \ 0$ 所确定的隐函数。求 $z=z(x,y)$ 的函数值在点 (0, 2) 处下降最快的方向上的单位向量。

参考答案:

（1）（**3 分**）. 当 $(x,y) \ = \ (0,2)$ 时，

$$z^3 \ + \ z \ - \ 2 \ = \ 0$$
$$(z^3-1)+ \ (z-1) = \ 0$$
$$(z-1)(\ z^2 \ + \ z \ + \ 1\ ) + \ (z-1) = \ 0$$
$$(z-1)(\ z^2 \ + \ z \ + \ 2) \ = \ 0$$
$$(\mathbf{z}-\mathbf{1})\ \ (\ (\mathbf{z} \ + \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})^{\mathbf{2}} \ + \ \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}\ ) \ = \ 0$$

实数解只有 $\mathbf{z} \ = \ \mathbf{1}$

（2）（**3 分**）.

$$F_x|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = \ z\, e^x|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = \ \mathbf{1}$$

$$F_y|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = \ -\mathbf{1}$$

$$F_z|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = \ 3z^2 + e^x|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = 3+1 \ = \ \mathbf{4}$$

（3）（**2 分**）.

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = \ -\frac{F_x}{F_z}|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = \ -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = -\frac{F_y}{F_z}|_{(0,\ 2,\ 1)} \ = -\frac{-1}{4} \ = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

（4）（**1 分**）. 函数 $z(x, y)$ 在点 (0, 2) 处的 **梯度** 是

$$\left(-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \ , \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \right)$$

（5）（**1 分**）. $z = z(x, y)$ 的函数值在点 (0, 2) 处 **下降最快** 的方向上的 **单位** 向量是

$$\left(\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \ , \ -\frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \right)$$

5.(10分) 求二元函数 $f(x, y) \ = \ x^y$ 在点 (1, 1) 的二阶泰勒多项式。

参考答案:

（1）（4分）. $f(x, y)$ 在给定点 (1 , 1) 的二阶 泰勒多项式是

$$f(1, 1) \ + \ \frac{1}{1!}df(1, 1) \ + \ \frac{1}{2!}d^2 f(1, 1) \ = \ 1 \ + \ \mathbf{df(1, 1)} \ + \ \frac{1}{2}\mathbf{d^2 f(1, 1)}$$

（2）（2分）.

$$df(1, 1) \ = \ (y\, x^{y-1})|_{(1,1)}\ (x-1) \ + \ (x^y \ \ln x)|_{(1,1)} \ (y-1)$$
$$= \ \mathbf{x} \ - \ \mathbf{1}$$

（3）（3分）.

$$d^2 f(1, 1)$$
$$= \ (y\,(y-1)\, x^{y-2})|_{(1,1)}\ (x-1)^2 \ + 2(x^{y-1} \ + \ y\, x^{y-1} \ \ln x))|_{(1,1)}\ (x-1)(y-1) \ + \ (x^y\ (\ln x)^2)|_{(1,1)}\ (y-1)^2)$$
$$= \ 0\,(x-1)^2 \ + 2(1+0)\,(x-1)(y-1) \ + \ 0\,(y-1)^2$$
$$= \ \mathbf{2\,(x-1)(y-1)}$$

（4）（1分）. $f(x, y) \ = \ x^y$ 在点 $(1, 1)$ 处的 **二阶** 泰勒多项式是

$$1 \ + \ (x-1) \ + \frac{1}{2}\, 2\,(x-1)(y-1) \ = \ 1 \ + \ x \ - \ 1 \ + \ xy - x - y + 1$$

$$= \ \mathbf{1} \ - \ \mathbf{y} \ + \ \mathbf{x\, y}$$

6.(10分) 设 D 是由直线 $x + y = 2\pi$, x 轴 和 y 轴 所围成的有界闭区域。求 D 上的二元函数 $f(x, y) \ = \ \sin\ x \ + \ \sin\ y \ - \ \sin(x+y)$ 达到最大值的 D 中所有点。

参考答案:

（1）（**2 分**）. **连续** 函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上必有最大值 M 。因此

$$K \ = \ \{\ (x, y) \in D \mid f(x, y) = M\ \}$$

是一个 **非空** 集合。任取 $(a, b) \ \in \ K$, (a, b) 可能是 D 的 内点， 也可能是 D 的 边界点。(注意到 $f(x, y)$ 在 D 的每个内点处有所有的偏导数。)

（2）（**4 分**）．如果 (a,b) 是 D 的**内点**，则

$$f_x(a,b)=\cos a-\cos(a+b)=0$$

$$f_y(ab)=\cos b-\cos(a+b)=0$$

推出

$$\cos a=\cos b=\cos(a+b)$$

又 $a+b\leq 2\pi$, $a>0, b>0$ 推出 唯一 解

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}}\ ,\quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}}$$

（3）（**2 分**）． 在 D 的 **边界** 上

$$f(x,y) = \mathbf{0}\ ,$$

而在 **内点** $(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ 处

$$f(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}) = \sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{3}\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}} > \mathbf{0}$$

所以 D 的 **边界上任何点 不在**K **中** 。

（4）（**2 分**）． K 是一个 **非空** 集合。因此

$$K=\{\ (\frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3})\ \ \}$$

即， D 上的二元函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 达到最大值 $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的 D 中 **所有点** 是

$$(\ \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}}\ ,\ \frac{\mathbf{2}\pi}{\mathbf{3}}\ )$$

7.(10分)

（1）（2分）．举例说明: 当 z 是 $(x,\ y)$ 的函数，也是 $(t,\ u)$ 的函数时， x 恒等于 t 推不出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 恒等于 $\frac{\partial z}{\partial t}$.

（2）（8分）．给定方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 \quad ,$$

作变量代换

$$x = t\ ,\quad y = \frac{t}{1 + t\,u}\ ,\quad z = \frac{t}{1 + t\,W}\quad .$$

证明:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0\quad .$$

参考答案:

（1）（**2分** ）．一个例子：

$$z = x + y$$

做代换

$$\mathbf{x} = \mathbf{t}\ ,\qquad y = t + u$$

则

$$z = t + t + u = 2t + u$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathbf{1} \neq \mathbf{2} = \frac{\partial z}{\partial t}$$

（注：在本小题解答中，只要写出的例子正确，都可以。）

（2）（**8分** ）．

（2.1）（**1分** ）．代换

$$z = \frac{t}{1 + t\,W}$$

推出

$$\frac{1}{z} = \frac{1 + tW}{t} = W + \frac{1}{t}$$

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}}$$

（2.2）（**2分**）. 用 **一元链式** 法则

$$\frac{\partial W}{\partial t} = W_t = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{t}\right)_t = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z^2}}\mathbf{z_t} + \frac{1}{t^2}$$

（2.3）（**3分**）. 用 **二元链式** 法则

$$\begin{aligned}\mathbf{z_t} &= \mathbf{z_x}\,\mathbf{x_t} + \mathbf{z_y}\,\mathbf{y_t}\\ &= z_x \times 1 + z_y\,\frac{1\,(1 + t\,u) - t\,u}{(1 + t\,u)^2}\\ &= z_x + z_y\,\frac{1}{(1 + t\,u)^2}\\ &= z_x + z_y\,\frac{y^2}{t^2}\\ &= \frac{1}{t^2}\,(t^2\,z_x + y^2 z_y)\\ &= \frac{1}{t^2}\,(x^2\,z_x + y^2 z_y)\end{aligned}$$

（2.4）（**1分**）. 把方程

$$x^2\,z_x + y^2\,z_y = z^2$$

代入（2.3）得

$$\mathbf{z_t} = \frac{\mathbf{z^2}}{\mathbf{t^2}}$$

（2.5）（**1分**）. 把（2.4）代入（2.2）得

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{1}{z^2}\,\frac{z^2}{t^2} + \frac{1}{t^2} = \mathbf{0}$$

8.(15分)

（1）（3分）. 证明： 任取 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$， 有

$$\mathbf{2}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \int_0^{\mathbf{2}\,x\,\sqrt{\mathbf{1} - x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

（2）（12分）. 证明： 任取 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)$， 有

$$\mathbf{2}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}} = \int_0^{\frac{\mathbf{2}\,x\,\sqrt{\mathbf{1} - x^4}}{\mathbf{1} + x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^4}}$$

参考答案:

（1）（**3分**）.

（1.1）（**1分**）. 当 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$， 令

$$\theta = \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{dt}}{\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{t^2}}} = \arcsin \mathbf{x} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\theta = x$$

（1.2）（**1分**）.

$$\sin(\mathbf{2}\theta) = 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \mathbf{2x\sqrt{1 - x^2}}$$

（1.3）（**1分**）. 因为

$$\mathbf{2}\theta \in \left(-\frac{\pi}{\mathbf{2}}, \frac{\pi}{\mathbf{2}}\right)$$

所以

$$\mathbf{2}\theta \ = \ \arcsin(\mathbf{2\,x}\sqrt{\mathbf{1-x^2}})$$

把（1.1）代入上式得到

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1\ -\ t^2}} \ = \ \int_0^{2x\sqrt{1\ -\ x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1\ -\ t^2}}$$

（注：用其他方法也可以。）

（2）（**12分**）.

（2.1）（**1分**）. 当 $x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{6}})$，令

$$\mathbf{A(x)} \ = \ \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{dt}}{\sqrt{\mathbf{1\ -\ t^4}}}$$

求导得

$$(\mathbf{A(x)})' \ = \ \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{1\ -\ x^4}}}$$

（2.2）（**6分**）. 复合函数的导函数

$$\left(A\left(\frac{\mathbf{2x\sqrt{1\ -\ x^4}}}{\mathbf{1\ +\ x^4}}\right)\right)'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1\ -\ (\frac{2x\sqrt{1\ -\ x^4}}{1\ +\ x^4})^4}} \ \frac{(\mathbf{2\sqrt{1\ -\ x^4}}\ +\ \mathbf{2\,x}\,\frac{\mathbf{-4x^3}}{\mathbf{2\sqrt{1\ -\ x^4}}})\,(\mathbf{1+x^4})\ -\ \mathbf{2\,x}\sqrt{\mathbf{1\ -\ x^4}}\ \mathbf{4x^3}}{(1\ +\ x^4)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{1\ +\ x^4})^{\mathbf{4}}\ -\ 16x^4(1-x^4)^2}} \ \frac{2}{\sqrt{1\ -\ x^4}} \ \left((1-x^4-2x^4)(1+x^4) - 4x^4(1-x^4)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1\ -\ x^4}} \ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1+4x^4+6x^8+4x^{12}+x^{16}}-16x^4(1-2x^4+x^8)}} \ (1-3x^4+x^4-3x^8-4x^4+4x^8)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1\ -\ x^4}} \ \frac{1}{\sqrt{1+4x^4+6x^8+4x^{12}+x^{16}-16x^4+32x^8-16x^{12}}} \ (\mathbf{1\ -\ 6\,x^4\ +\ x^8})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1\ -\ x^4}} \ \frac{1}{\sqrt{\mathbf{1+36x^8+x^{16}-12x^4+2x^8-12x^{12}}}} \ (1-6x^4+x^8)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1\ -\ x^4}} \ \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{1-6x^4+x^8})^{\mathbf{2}}}} \ (1-6x^4+x^8)$$

（2.3）（**2分**）. 因为

$$\mathbf{x} \in \left(-\frac{\mathbf{1}}{\sqrt[4]{6}}, \frac{\mathbf{1}}{\sqrt[4]{6}}\right)$$

所以

$$1-6x^4+x^8 \ > \ 1-6\,\frac{1}{6}+x^8 \ = \ x^8 \ \geq \ \mathbf{0}$$

$$\sqrt{(\mathbf{1-6x^4+x^8})^{\mathbf{2}}} = \mathbf{1-6x^4+x^8}$$

（2.4）（**1分**）. 把（2.3）代入（2.2）得到

$$\left(A\left(\frac{2x\sqrt{1\ -\ x^4}}{1\ +\ x^4}\right)\right)' \ = \ \frac{2}{\sqrt{1\ -\ x^4}} \ \frac{1}{1-6x^4+x^8}\,(1-6x^4+x^8) \ = \ \frac{2}{\sqrt{1\ -\ x^4}} \ = \ (2A(x))'$$

$$\left(\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{2x\sqrt{1\ -\ x^4}}}{\mathbf{1\ +\ x^4}}\right)\ -\ \mathbf{2A(x)}\right)' \ = \ \mathbf{0}$$

（2.5）（**2 分**）. 又当 $x=0$ **时**

$$A\left(\frac{2\times 0\sqrt{1\ -\ 0^4}}{1\ +\ 0^4}\right)\ -\ 2A(0) \ = \ 0-\ 2\times\ 0 \ = \ \mathbf{0}$$

由微分中值定理可以推出 对所有 $x \in (-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{6}})$，有

$$\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{2x\sqrt{1-x^4}}}{\mathbf{1+x^4}}\right) - \mathbf{2A(x)} = \mathbf{0}$$

$$2\,A(x) = A\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right)$$

把（2.1）代入上式得到

$$2\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

9.(15分) 设函数 $P(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，$P(0)=0$, $P(1)=1$，$P(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内可导，并且在每点处导数 $P'(x)$ 都为正数。 任意 取定 正实数 A, 正实数 B, 正整数 n . 证明：在开区间 $(0,1)$ 内存在严格递增的 $n+1$ 个实数 $\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n$ 使得

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(\theta_k)} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} A^{n-k} B^k$$

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n < 1$$

参考答案:

（1）（**3分** ）．定义

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A+B}}, \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}}{\mathbf{A+B}}$$

对于 $t=1,\cdots,n+1$, **定义**

$$\mathbf{c_0 = 0}, \quad c_1 = a^n, \quad \mathbf{c_t} = \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{t-1}} \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k!\,(n-k)!}} \mathbf{a^{n-k}\,b^k} \in [0, 1]$$

特别

$$c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^{n-k} b^k = (a+b)^n = 1^n = 1$$

$$c_{n+1} = 1$$

（2）（**3分** ）．因为 $P(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $P(0)=0$, $P(1)=1$, 对于每个 $k=1,\cdots,n$ 有 $c_k \in [0,1]$， 所以用连续函数的 **介值定理** 可以 推出 对于每个 $k=1,\cdots,n$ 存在实数 $x_k \in [0,1]$ 使得

$$\mathbf{P(x_k)} = \mathbf{c_k}$$

定义

$$x_0 = 0, \quad x_{n+1} = 1$$

所以也有

$$\mathbf{P(x_0)} = P(0) = 0 = \mathbf{c_0}$$
$$\mathbf{P(x_{n+1})} = P(1) = 1 = \mathbf{c_{n+1}}$$

（3）（**2分** ）．对于每个 $k=0,1,\cdots,n$ 有

$$c_{k+1} - c_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} a^{n-k} b^k > 0$$

所以

$$0 = c_0 < c_1 < \cdots < c_n < c_{n+1} = 1$$

条件 $P(x)$ 在 **$(0,1)$ 内 $\mathbf{P'(x) > 0}$**，和 $P(x)$ 在 **[0, 1] 上连续**， 推出 $P(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 **严格递增** 的. 用（2）中 对于每个 $k=-1,0,1,\cdots,n$ 有 $P(x_k) = c_k$ 得到

$$\mathbf{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1}$$

（4）（**4分** ）. 用 **微分中值定理** 推出对于每个 $k = 0, 1, \cdots, n$ 存在

$$\theta_k \ \in \ (x_k, \ x_{k+1})$$

使得

$$\mathbf{P(x_{k+1}) \ - \ P(x_k) \ \ = \ \ P'(\theta_k) \, (x_{k+1} \ - \ x_k \ )}$$

$$\mathbf{0 = x_0 \ < \ \theta_0 \ < \ x_1 \ < \ \theta_1 \ < \ x_2 \ < \ \cdots \ < \ x_n \ < \ \theta_n \ < \ \ x_{n+1} = 1}$$

（5）（**2分** ）. 把（2）代入（4）得到

$$c_{k+1} - c_k \ \ = \ \ P'(\theta_k) \, (x_{k+1} \ - \ x_k \ )$$

再 **把（1）代入** 上式得到 对于每个 $k = 0, 1, \cdots, n$ 有

$$\mathbf{\frac{n!}{k! \, (n-k)!} \, a^{n-k} \, b^k} \ = \ P'(\theta_k) \, (x_{k+1} \ - \ x_k \ )$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P'(\theta_k)}} \ \ \frac{n!}{k! \, (n-k)!} \, a^{n-k} \, b^k \ = \ x_{k+1} \ - \ x_k$$

（6）（**1分** ）. 对于（5) 从 $k = 0, 1, \cdots, n$ **求和**

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(\theta_k)} \ \frac{n!}{k! \, (n-k)!} \, a^{n-k} \, b^k$$

$$= \sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \ \mathbf{(x_{k+1} \ - \ x_k) \ = \ x_{n+1} \ - \ x_0}$$

$$= \ 1 \ - \ 0 \ \ = \ \ 1$$

把（1）中 $a \ = \ \frac{A}{A+B}$, $\quad b \ = \ \frac{B}{A+B}$ 代入上式得到

$$\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{P'(\theta_k)}} \ \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{k! \, (n-k)!}} \, \mathbf{A^{n-k} \, B^k} \ \ = \ \ \mathbf{(A+B)^n}$$