北京大学数学科学学院期中考试参考答案

2021 - 2022学年第 1 学期

考试科目 <u>高等数学B1</u>

姓 名 __________ 学 号 ____________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

请特别注意：在解答下面所有试题过程中，不可直接引用由主讲老师划定的教材中本次考试范围 之外的高等数学定理和公式。如果有争议，以主讲老师判定为准。

1.(15分) 导数类基本计算题。

（1）(5分)． 求函数 $f(x) = x^{\arcsin x}$ （$0 < x < 1$）的导函数 $f'(x)$ ．

（2）(5分)． 求函数 $f(x) = \int_e^{e^x} \frac{dt}{1+\ln t}$ （$x > 1$）的导函数 $f'(x)$ ．

（3）(5分)． 求函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x = 0$ 点的 3 阶导数 $f'''(0)$ ．

参考答案:

（1）． 用复合函数求导公式（链式法则）计算得 $f'(x) = x^{\arcsin x}(\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\arcsin x}{x})$ ．

（2）． 用复合函数求导公式（链式法则），和变上限定积分求导公式计算得 $f'(x) = \frac{e^x}{1+x}$ ．

（3）． 设 $y = f(x) = \arctan x$

$y' = f'(x) = (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

$y'(1+x^2) = 1$ 代入 $x = 0$ 得 $y'(0) = 1$

$y''(1+x^2) + y'\, 2x = 0$

$y'''(1+x^2) + y''\, 2x + y''\, 2x + y'\, 2 = 0$ 代入 $x = 0$ 和 $y'(0) = 1$ 得

$$f'''(0) = y'''(0) = -2$$

2.(15分) 积分类基本计算题。

（1）(5分)． 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x}\, dx \quad .$$

（2）(5分)． 求直角坐标 (x, y) 给出的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, \frac{1}{2})$ 的弧长。

（3）(5分)．设奇数 $n \geq 3$. 求极坐标 (r, θ) 给出的 n 叶玫瑰线 $r = \sin(n\,\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 所围的有界图形的面积.

参考答案:

（1）． 用变量代换 $t = \sin x$ 可以得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x} dx = \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\ln 2$$

（2）． 用平面直角坐标下 弧长公式得到此弧长等于

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2})$$

（3）． 用平面极坐标下 面积公式得到此面积等于

$$2n\,\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{4n}}\sin^2 n\theta d\theta \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,dt \;=\; \frac{1}{2}(t-\frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \;=\; \frac{\pi}{4}$$

$$(\ t\ =\ n\,\theta\ )$$

3.(15分) 假设 $x_1>0$, 对于每个正整数 n 有 $x_{n+1}\ =\ \frac{1}{2}\,(\,x_n+\frac{1}{x_n}\,)$. 证明 $\lim_{n\to\infty}\,x_n$ 存在，并求出此极限的值。

参考答案:

（1）用 归纳法， 从条件 $x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$ 推出对于所有正整数 n 有 $x_n>0$. 因此 x_n 有**下界** .

（2）又

$$x_{n+1}\ =\ \frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})\ \geq\ \sqrt{x_n\ \frac{1}{x_n}}\ =\ 1$$

（3）

$$x_{n+1}-x_n\ =\ \frac{1}{2}\,(\,x_n+\frac{1}{x_n}\,)-x_n\ =\ \frac{1}{2}\,(\frac{1}{x_n}-x_n)\ =\ \frac{1}{2}\,(\frac{1-x_n^2}{x_n})$$

再用上面（1）（2）得到

$$x_{n+1}-x_n\ \leq\ 0$$

推出 x_n **单调下降** 。

（4）结合上面（1）和（3）推出 $\lim_{n\to\infty}\,x_n\ =\ L$ **存在**。

（5）

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\,(\,x_n+\frac{1}{x_n}\,)$$

取 $n\to\infty$ 得到

$$L\ =\ \frac{1}{2}\,(\,L+\frac{1}{L}\,)$$

结合上面（2）推出 $A\ \geq\ \mathbf{1}$, 一起推出 $L=1$， 即

$$\lim_{n\to\infty}x_n\ =\ 1$$

4.(20分) 设 $x>0$, 定义

$$p(x)=\int_0^x\frac{dt}{\sqrt{t^3\ +\ 2021}}\quad .$$

证明方程 $p(x+1)\ =\ p(x)\ +\ \sin x$ 有 **无穷个 互不相等的 正** 实数解。

参考答案:

（1） 对于 $x>0$,

$$p(x{+}1)-p(x)\ =\int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}\geq\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}}\ (x{+}1{-}x)\ =\ \frac{1}{\sqrt{(x+1)^3+2021}}\ >\ 0$$

因此

$$0<p(x+1)\ -\ p(x)$$

（2） 又 对于 $x>0$，

$$0<p(x+1)\ -\ p(x)\ =\ \int_x^{x+1}\frac{dt}{\sqrt{t^3+2021}}\le\frac{1}{\sqrt{x^3+2021}}\ (x+1-x)\ =\ \frac{1}{\sqrt{x^3+2021}}$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}(p(x+1)\ -\ p(x)\ )\ =\ 0$$

此推出 存在 $A>0$ 使得 当 $x>A$ 时

$$p(x+1)\ -\ p(x)\ <\ \frac{1}{2}$$

（3） 对于每个正整数 n，用上面（1）得到

$$\sin(2n\pi)\ -\ p(2n\pi+1)\ +\ p(2n\pi)\ \ =\ \ 0-p(2n\pi+1)\ +\ p(2n\pi)\ <\ 0$$

（4） 当正整数 n 使得 $2n\pi+\frac{\pi}{2}>A>0$ 时，用上面（2）得到

$$\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})\ -\ p(2n\pi+\frac{\pi}{2}+1)\ +\ p(2n\pi+\frac{\pi}{2})$$

$$=\ 1\ -\ p(2n\pi+\frac{\pi}{2}+1)\ +\ p(2n\pi+\frac{\pi}{2})\ \ >\ \ 1\ -\ \frac{1}{2}\ \ >\ \ 0$$

（5） 任取 $x>0$， $\frac{1}{\sqrt{t^3+2021}}$ 是 $t\in[0,x]$ 上的连续函数, 因此 $p(x+1)$， $p(x)$ 是 x 的连续函数。 所以当 $x>A>0$ 时，$\sin x\ -\ p(x+1)\ +\ p(x)$ 是 x 的连续函数。

根据上面（3）和（4）和连续函数的“介值定理”可以得到：

当 $2n\pi+\frac{\pi}{2}>A>0$ 时，存在正实数 $x_n\in(\ 2n\pi\ ,\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\ )$ 使得

$$\sin x_n\ -\ p(x_n+1)\ +\ p(x_n)\ =\ 0\,.$$

（6） A 是有限数，所以有**无穷个** 整数 n 使得 $2n\pi+\frac{\pi}{2}>A$ 。 对于不同的 **正** 整数 n，开区间 $(\ 2n\pi\ ,\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\ )$ **互不相交** 。 所以

$$\sin x\ -\ p(x+1)\ +\ p(x)\ =\ 0\qquad \text{即}\qquad p(x+1)=p(x)+\sin x$$

有 **无穷个 互不相等的 正** 实数解 x_n .

5.(15分) 证明：对于 [0, 1] 上的 **任何 连续** 函数 $f(x)$， 等式 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(x)\ \sin\ (nx)\ dx\ =\ 0$ 都成立。 （要求写出证明的每步过程和理由。注：本题中没有假定 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 存在。因此，如果本题解答中用到了导数 $f'(x)$ 的存在性，则不能得分。)

参考答案:

（1） 设 k 为正整数, 对每个 $j=0,\ldots,k-1$, 函数 $f(x)$ 在 [0, 1] 上 **连续** 推出 $f(x)$ 在闭子区间 $[\frac{j}{n},\frac{j+1}{n}]$ 也连续，因此在其上存在达到其最大值 M_j，也达到其最小值 m_j .

（2） 函数 $f(x)$ 在 [0, 1] 上 **连续** 推出 $\int_0^1 f(x)dx=A$ 存在有限，并且特殊的黎曼和序列

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}M_j\,\frac{1}{k}\ =\ A$$

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}m_j\,\frac{1}{k}\ =\ A$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}(M_j-m_j)\,\frac{1}{k}\ =\ A-A=0$$

因此, 任取 $\epsilon>0$, 存在 $K>0$ 使得当 $k\geq K$ 时有

$$|\ \sum_{j=0}^{k-1}(M_j-m_j)\,\frac{1}{k}\ |\ <\ \frac{\epsilon}{2}$$

（3） $f(x)$ 在 [0, 1] 上 **连续** 推出 $f(x)$ 在 [0, 1] 上有界，即存在常数 $B>0$ 使得： 对任意 $x\in[0,1]$, $|f(x)|\ \leq\ B.$ 特别对所有 $j\ =0,\dots k-1$, 有

$$|f(\frac{j}{k})|\ \leq\ B$$

（4）用上面（2）（3）中不等式， 对于 任何 正整数 n，

$|\int_0^1 f(x)\ \sin\ nxdx|\ \ =\ |\ \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} f(x)\ \sin nxdx\ |$

$=\ |\ \sum_{j=0}^{k-1}\ \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}(\ f(x)-f(\frac{j}{k})\ )\ \sin nxdx+\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} f(\frac{j}{k})\ \sin nxdx\ |$

$\leq\ \sum_{j=0}^{k-1}\ \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}|\ f(x)-f(\frac{j}{k})\ |\ |\ \sin nx\ |dx\ \ +\ |\ \sum_{j=0}^{k-1} f(\frac{j}{k})\ \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\sin nx\ dx\ |$

$\leq\ \sum_{j=0}^{k-1}\ \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}|\ f(x)-f(\frac{j}{k})\ |\,dx\ \ +\ |\sum_{j=0}^{k-1}\ \ f(\frac{j}{k})\ \frac{1}{n}\ \ (\ -\cos n(\frac{j+1}{k})+\cos n(\frac{j}{k})\ )\ |$

$\leq\ \sum_{j=0}^{k-1}\ \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\ |\ M_j-m_j\ |\,dx+\ \sum_{j=0}^{k-1}\ |\,f(\frac{j}{k})|\ \frac{1}{n}\ \ |-\cos n(\frac{j+1}{k})+\cos n(\frac{j}{k})\ |$

$\leq\ \sum_{j=0}^{k-1}\ (M_j-m_j)\,\frac{1}{k}\ +\ \ k\ B\ \frac{1}{n}\,2$

$<\ \frac{\epsilon}{2}\ +\ 2\,B\,k\,\frac{1}{n}$

（5）取 $k=K$ 得: 对于任何正整数 n，

$$|\ \int_0^1 f(x)\ \sin\ nx\ dx\ |\ \ <\ \ \frac{\epsilon}{2}\ +\ 2\,B\,K\,\frac{1}{n}$$

取 $N=[\frac{4BK}{\epsilon}]+1$， 则当 $n>N$ 是有

$$|\int_0^1 f(x)\sin\ nxdx|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}\ =\ \epsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin\ nx\ dx=0$$

6.(20分) (基础概念的深入理解.) 设 $y=f(x)=x^3$, $x=g(t)=t^2$, $y=f(g(t))=t^6$, $\Delta t=0.1$, $\Delta x=g(1+0.1)-g(1)=0.21$.

（1）(7分) 当把 t **作为自变量** 时， 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分记为 d_t^2y , 函数 $x=g(t)$ 的一阶微分记为 d_tx .

计算出： 当 $t=1,\ \Delta t=0.1$ 时， 函数 $y=f(g(t))$ 的二阶微分 $d_t^2y|_{t=1,\ \Delta t=0.1}$ ，和 函数 $x=g(t)$ 的一阶微分 $d_tx|_{t=1,\ \Delta t=0.1}$.

（2）(7分) 当把 x **作为自变量** 时， 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分记为 d_x^2y ， x（看作 x 的函数）的一阶微分记为 d_xx .

计算出： 当 $x=1,\ \Delta x=0.21$ 时， 函数 $y=f(x)$ 的二阶微分 $d_x^2y|_{x=1,\ \Delta x=0.21}$ ，和 x（看作 x 的函数）的一阶微分 $d_xx|_{x=1,\ \Delta x=0.21}$.

（3）(6分) $\frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}\Big|_{t=1,\ \Delta t=0.1}$ 与 $\frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}\Big|_{x=1,\ \Delta x=0.21}$ 相等 吗?

参考答案:

（1）

$$d_t^2y|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = (t^6)''_t\ (\Delta t)^2|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = 30\,t^4\,(\Delta t)^2|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = 0.3$$

$$d_tx|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = (t^2)'_t\ \Delta t|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = 2\,t\ \Delta t|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = 0.2$$

（2）

$$d_x^2y|_{x=1,\ \Delta x=0.21} = (x^3)''_x\ \Delta x|_{x=1,\ \Delta x=0.21} = 6\,x\ \Delta x|_{x=1,\ \Delta x=0.21} = 0.2646$$

$$d_xx|_{x=1,\ \Delta x=0.21} = (x)'_x\ \Delta x|_{x=1,\ \Delta x=0.21} = 1\ \Delta x|_{x=1,\ \Delta x=0.21} = 0.21$$

（3）上式用了由上面（1）（2）中计算结果 推出

$$(d_tx)^2|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = 0.2^2 = 0.04$$

$$(d_xx)^2|_{x=1,\ \Delta x=0.21} = 0.21^2 = 0.0441$$

$$\frac{d_t^2y}{(d_tx)^2}\Bigg|_{t=1,\ \Delta t=0.1} = \frac{0.3}{0.04} = 7.5 \neq 6 = \frac{0.2646}{0.0441} = \frac{d_x^2y}{(d_xx)^2}\Bigg|_{x=1,\ \Delta x=0.21}$$

不相等 ！