北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2022 - 2023学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1

姓 名 ____________ 学 号 ________________

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1.(20分)

（1）(6分)． 求出序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$$

（2）(7分)． 求出序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2\,(n^k)} \right)$$

（3）(7分)． 求出函数极限

$$\lim_{x\to 0} (1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(注：在解本小题中，不可直接引用期中考试范围之外的 洛必达法则 和 高阶泰勒公式。)

参考答案:

（1）(6分)．

$$1 \ \leq \ 2+\cos n \ \leq \ 3$$

$$1 \ \leq \ \sqrt[n]{2 + \cos n} \ \leq \ \sqrt[n]{3}$$

已知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

用夹逼定理可以得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2 + \cos n} = 1$$

（2）(7分)． 注意到

$$\frac{k}{n} - \frac{1}{2\,(n^k)} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad k = 1, \cdots, n$$

把所求的极限中表达式 看作 $\sin x$ 在分割小区间 $[\ \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\ ]$ 中取点 $\xi_k = \frac{k}{n} - \frac{1}{2\,(n^k)}$ 处的值，作 Riemann 和。因此得到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2\,(n^k)} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{2\,(n^k)} \right) \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \sin x dx = -\cos x|_0^1 = 1 - \cos 1$$

（3）(7分)． 用初等函数在其定义域中的连续性、变量代换 和 已知的极限

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

可以得到

$$\lim_{x\to 0} (1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+\tan^2 x)}{\tan^2 x}\ \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \ e^{1 \cdot \frac{1}{1}} \ = \ e$$

2.(20分)

（1）(6分)． 设 $x>0$． 求出函数
$$f(x) \ = \ x^{\sqrt{x}}$$
的导函数 $f'(x)$ ．

（2）(7分)． 设 $x<1$． 求出函数
$$g(x) \ = \ \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$
的导函数 $g'(x)$ ．

（3）(7分)． 设 $x \neq \pm 1$． 求出函数
$$h(x) \ = \ \frac{1}{x^2-1}$$
4 阶导函数 $h^{(4)}(x)$.

参考答案:

（1）(6分)． 用初等函数的导数公式和链式法则计算得
$$f'(x) \ = \ (e^{\sqrt{x} \ \ln x})'$$
$$= \ e^{\sqrt{x} ln x} \ (\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \ln x \ + \ \sqrt{x} \ \frac{1}{x} \ )$$
$$= \ x^{\sqrt{x}} (\ \frac{1}{2\sqrt{x}} \ \ln x \ + \ \frac{1}{\sqrt{x}} \ )$$
$$= \ \frac{1}{2} x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (\ln x + 2)$$

（2）(7分)． 用变上限积分的导数公式和链式法则计算得
$$g'(x) \ = \ \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^3 x}}$$

（3）(7分)．
$$h^{(4)}(x) \ = \ (\frac{1}{x^2-1})^{(4)} \ = \ \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1} \ - \ \frac{1}{x+1})^{(4)}$$
$$= \ \frac{(-1)^4 \ 4!}{2} (\frac{1}{(x-1)^5} \ - \ \frac{1}{(x+1)^5})$$
$$= \ 12 \ (\ \frac{1}{(x-1)^5} \ - \ \frac{1}{(x+1)^5})$$

3.(15分) 求出不定积分
$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)\,(x-1)^5}}$$

参考答案: 作变量代换
$$t \ = \ \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \ = \ (1+\frac{2}{x-1})^{\frac{1}{3}}$$
$$dt \ = \ \frac{1}{3} \ (\frac{x+1}{x-1})^{-\frac{2}{3}} \ (\ -\frac{2}{(x-1)^2} \ ) \ dx$$
$$= \ -\frac{2}{3} \ (x+1)^{-\frac{2}{3}} \ \ (x-1)^{\frac{2}{3}} \ (x-1)^{-2} \ \ dx$$
$$= \ -\frac{2}{3} \ (x+1)^{-\frac{2}{3}} \ \ (x-1)^{-\frac{4}{3}} \ \ dx$$
$$-\frac{3}{2} \ t \, dt \ = \ (x+1)^{\frac{1}{3}} \ \ (x-1)^{-\frac{1}{3}} \ \ (x+1)^{-\frac{2}{3}} \ \ (x-1)^{-\frac{4}{3}} \ \ dx$$

$$= \ (x+1)^{-\frac{1}{3}} \quad (x-1)^{-\frac{5}{3}} \ dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)\,(x-1)^5}} = -\int \frac{3}{2}\ t\,dt \ = \ -\frac{3}{4}\ t^2 \ + C$$

$$= \ -\frac{3}{4}\ (\ \frac{x+1}{x-1}\ )^{\frac{2}{3}} + C\,. \quad C \text{ 为任意常数。}$$

4.(15分) 设 K 是由曲线弧 $y=e^x$ $(\ 0\le x\le 1\ )$ 及 直线 $x=0,$ $x=1,$ $y=0$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体。 求出 K 的侧面积。

参考答案:

（1）**(6分)．** 用旋转体的侧面积公式得到 K 的侧面积等于

$$\int_0^1 2\pi\, e^x \sqrt{1+(\,(e^x)'\,)^2}\, dx \ = \ 2\pi \int_0^1 \ e^x \sqrt{1+e^{2x}}\, dx$$

（2）**(3分)．** 做变量代换 $t=e^x$, 此积分等于

$$2\pi \int_1^e \sqrt{1+t^2}\, dt$$

（3）**(6分)．** 用分部积分计算出不定积分

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \ t\sqrt{1+t^2} \ - \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$$

$$= \ t\sqrt{1+t^2} \ - \int \sqrt{1+t^2}\, dt \ + \int \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$$

$$= \ t\sqrt{1+t^2} \ - \int \sqrt{1+t^2}\, dt \ + \int \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}} \ \frac{t+\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{1+t^2}}\, dt$$

$$= \ t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\, dt \ + \int \frac{1}{t+\sqrt{1+t^2}} \ (1+\frac{2\,t}{2\sqrt{1+t^2}})\, dt$$

$$= \ t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\, dt \ + \ \ln(\,t+\sqrt{1+t^2}\,) \ + \ C\,. \quad C \text{ 为任意常数.}$$

因此

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt \ = \ \frac{1}{2}\, t\sqrt{1+t^2} \ + \frac{1}{2}\ln(\,t+\sqrt{1+t^2}\,) \ + \ C_1. \quad C_1 \text{ 为任意常数.}$$

因此 K 的侧面积等于

$$2\pi \int_0^1 \ e^x \sqrt{1+e^{2x}}\, dx \ = \ 2\pi \int_1^e \sqrt{1+t^2}\, dt \ = \ \pi\, t\sqrt{1+t^2} \ + \ \pi\ln(\,t+\sqrt{1+t^2}\,)\Big|_1^e$$

$$= \ \pi\, e\sqrt{1+e^2} \ + \ \pi\ \ln(\,e+\sqrt{1+e^2}\,) \ - \ \pi\sqrt{2} \ - \ \pi\ \ln(1+\sqrt{2})$$

5.(10分) 设 a 为正实数， b 为正实数， c 为正实数， $f(x)$ 是 $(\,-\infty\,,\,+\infty\,)$ 上的连续函数，

$$f(0)=-a \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) \ = \ b \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \ = \ c \quad .$$

证明 $f(x)$ 在 $(\,-\infty\,,\,+\infty\,)$ 上至少有两个不同的实数根 r_1 ， r_2 ， $r_1 \ne r_2$ ．

参考答案:

（1）(5分). $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \ = \ b \ > \ 0$ 推出 存在 M 使得当 $x<M$ 时，有

$$-\frac{b}{2} < f(x)-b < \frac{b}{2}$$

$$\frac{b}{2} < f(x) < \frac{3b}{2}$$

取 $x_1 = -|M| - 1 < 0 \le -|M| \le M$ ，则

$$f(x_1) > \frac{b}{2} > 0$$

已知 $f(0) = -a < 0$. 据连续函数介值定理，存在实数 $r_1 \in (x_1, 0)$ 满足方程 $f(r_1) = 0$.

（2）(5分). $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c > 0$ 推出 存在 N 使得当 $x > N$ 时，有

$$-\frac{c}{2} < f(x) - c < \frac{c}{2}$$

$$\frac{c}{2} < f(x) < \frac{3c}{2}$$

取 $x_2 = |N| + 1 > |N| \ge N$ ，则

$$f(x_2) > \frac{c}{2} > 0$$

已知 $f(0) = -a < 0$. 据连续函数介值定理，存在实数 $r_2 \in (0, x_2)$ 满足方程 $f(r_2) = 0$.
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty$ 上至少有两个不同的实数根 r_1， r_2 ， $r_1 \neq r_2$ (因为 $r_1 < 0$， $r_2 > 0$ ）.

6.(20分) 设

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx .$$

（1）(12分). 证明: 对于 $r \in (-1, 1)$, 有 $2A(r) = A(r^2)$.

（2）(4分). 证明: $A(r)$ 在 $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 上为有界函数 .

（3）(4分). 对于任意 $r \in (-1, 1)$, 从上面（1）和（2）出发推算出 $A(r)$ 的值。

(注：本题要求写出详细过程。)

参考答案:

（1）(12分).

（1.1）(4分). 做 **变量代换** $x = \pi - t$ 得

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r\cos x + r^2)\, dx$$

$$= -\int_{\pi}^{-\pi} \ln(1 - 2r\cos(\pi - t) + r^2)\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{0} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt + \int_0^{\pi} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt$$

第一部分做 **变量代换** $t = 2\pi + u$ 得

$$A(r) = \int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 + 2r\cos(2\pi + u) + r^2)\, du + \int_0^{\pi} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 + 2r\cos u + r^2)\, du + \int_0^{\pi} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt$$

$$= \int_{\pi}^{2\pi} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt + \int_0^{\pi} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln(1 + 2r\cos t + r^2)\, dt$$

即

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 + 2r\cos x + r^2)\, dx$$

（1.2）(4分). 上面带入 **下面第二个** $A(r)$ 得

$$2A(r) \ = \ A(r) + A(r)$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln(1 \ - \ 2r\cos x \ + \ r^2) \ dx \ \ + \ \int_0^{2\pi} \ln(1 \ + \ 2r\cos x \ + \ r^2) \ dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln\left(\ (1 \ - \ 2r\cos x \ + \ r^2)(1 \ + \ 2r\cos x \ + \ r^2) \ \right) \ dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln\left(\ (1+r^2)^2 - 4r^2\cos^2 x \ \right) \ dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2 + r^4 - 4r^2\cos^2 x \ \right) \ dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2(1 - 2\cos^2 x) + r^4 \ \right) \ dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2 cos(\ \mathbf{2x} \ ) + r^4 \right) \ dx$$

（1.3）(4分). 对上式做 **变量代换** $y = 2x$ ，再对下面的第二个式子做 **变量代换** $z = y - 2\pi$ ，得

$$2A(r) \ = \ \frac{1}{2}\int_0^{4\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2 cos\, y + r^4\right) \ dy$$

$$= \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2 cos\, y + r^4\right) \ dy \ + \ \frac{1}{2}\int_{2\pi}^{4\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2 cos\, y + r^4\right) \ dy$$

$$= \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2 cos\, x + r^4\right) \ dx \ + \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 + 2r^2 cos(z + 2\pi) + r^4\right) \ dz$$

$$= \ \frac{1}{2} A(r^2) \ + \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 \ + \ 2r^2 cos\, z \ + \ r^4\right) \ dz$$

$$= \ \frac{1}{2} A(r^2) \ + \ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \ln\left(\ 1 \ + \ 2r^2 cos\, x \ + \ r^4\right) \ dx$$

$$= \ \frac{1}{2} A(r^2) \ + \ \frac{1}{2} A(r^2) \ \ = \ \ A(r^2)$$

即, 任意给定 $r \in (-1, 1)$, 有

$$\mathbf{2A(r)} \ = \ \mathbf{A(r^2)}$$

（2）**(4分)．** 当 $|r| < 1$ 时， 有

$$0 \ < \ (1 - |r|)^2 \ = \ 1 \ - \ 2|r| \ + \ r^2 \ \leq 1 \ - \ 2r\cos x \ + \ r^2 \ \leq 1 \ + \ 2|r| \ + \ r^2$$

当 $x > 0$ 时， $\ln \mathbf{x}$ 是 **严格单调上升** 函数（因为 $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ ）， 因此

$$\ln(1 \ - \ 2|r| \ + \ r^2) \ \leq \ \ln(1 \ - \ 2r\cos x \ + \ r^2) \ \leq \ \ln(1 \ + \ 2|r| \ + \ r^2)$$

$$2\pi \ \ln(1 \ - \ 2|r| \ + \ r^2) \ \leq \ \int_0^{2\pi} \ln(1 \ - \ 2r\cos x \ + \ r^2) \ dx \ \leq \ 2\pi \ \ln(1 \ + \ 2|r| \ + \ r^2)$$

所以， 对于 任何

$$\mathbf{r} \ \in \ (-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ , \ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \ )$$

有

$$2\pi \ \ln(1 \ - \ 1 \ + \ \frac{1}{4}) \ \leq \ A(r) \ = \ \int_0^{2\pi} \ln(1 \ - \ 2r\cos x \ + \ r^2) \ dx \ \leq \ 2\pi \ln(1 \ + \ 1 \ + \ \frac{1}{4})$$

$$-\mathbf{2}\pi \ \ln \ \mathbf{4} \ \leq \ \mathbf{A(r)} \ \leq \ \mathbf{2}\pi \ln \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4}}$$

因此， $A(r)$ **在** $(\ -\frac{1}{2} \ , \ \frac{1}{2} \ )$ **上为有界函数 ．**

（3）**(4分)** ． 多次用上面（1）得到：对于任何正整数 n，对于任意 **给定** $r \in (-1, 1)$，有

$$\mathbf{A(r) \ = \ \frac{1}{2}\, A(r^2) \ = \ \frac{1}{2^n}\, A(r^{2n})}$$

存在 N, 当 $\mathbf{n > N}$ 时，有

$$|\mathbf{r^n}| < \mathbf{\frac{1}{2}}$$

用上面（2）得到：

$$-2\pi \, ln\, 4 \ \le \ A(r^n) \ \le \ 2\pi \, ln \frac{9}{4}$$

推出

$$\lim_{\mathbf{n \to +\infty}} \left(\ \mathbf{\frac{1}{2^n}\, A(r^n)} \ \right) \ = \ \mathbf{0}$$

所以,对于 **任意** 给定 $r \in (-1, 1)$，有

$$A(r) \ = \ \lim_{n \to +\infty} A(r) \ = \ \lim_{n \to +\infty} \left(\ \frac{1}{2^n} A(r^n) \ \right) \ = \ 0$$