# 高等数学 B (I) 2023-2024 秋季学期期中试题

考试时间：2023 年 11 月 12 日

一、（10 分）求序列极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{ne})^n.$$

二、（10 分）设 $[x]$ 是不超过 $x$ 的最大整数. 求函数极限

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{[x]}.$$

三、（10 分）设 $x>0$. 求函数

$$f(x)=\int_0^{\ln x}\sqrt{1+e^t}\ \mathrm{d}t.$$

的导函数.

四、（10 分）求不定积分

$$\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\ \mathrm{d}x.$$

五、（10 分）求欧氏平面直角坐标系中曲线

$$y=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

在 $x=1$ 到 $x=2$ 之间的弧长.

六、（10 分）设欧氏空间中 $V$ 是由曲线弧 $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{2\pi}}\quad(1\le x\le 2)$ 及直线 $x=2,\quad y=0$ 所围成的曲边三角形绕 $x$ 轴旋转一周而成的旋转体。求 $V$ 的体积.

七、（10 分）给定正实数 $a_1>0, b_1>0$ . 设 $a_1>b_1$, 对于每个正整数 $n$ , 有递归公式

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在有限.

八、（20 分）本题中每个小题都要求写出证明和计算过程。

(1)（2 分）证明：当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，有

$$-1<\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}<1.$$

(2)（8 分）当 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，求出下面定义的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ .

$$f(x)\ =\ \arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right).$$

(3)（10 分）证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}$$

九、（10 分）设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续的实值函数满足 $f(0) = g(0)$, $\sin f(1) = \sin g(1)$, $\cos f(1) = \cos g(1)$. 对于每个 $x \in [0,1]$ 有

$$(\cos f(x) + \cos g(x))^2 + (\sin f(x) + \sin g(x))^2 \neq 0.$$

证明 $f(1) = g(1)$.