

高等数学 B 2024-2025 秋季学期期中试题

考试时间：2024 年 11 月 10 日

一、(10 分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)}.$$

二、(10 分) 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos(2x)} \right)^{\csc^2 x}.$$

三、(10 分) 设 $(-1, 1)$ 上的函数

$$f(x) = \int_0^{\arcsin x} \frac{dt}{\sqrt{1 + (\sin t)^2}},$$

求 $f(x)$ 的 2 阶导函数 $f''(x)$ 。

四、(10 分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n^k k} \right).$$

五、(15 分) 求不定积分

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx.$$

六、(15 分) 设 T 是由曲线弧

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{\pi}}, \quad (1 \leq x \leq 2)$$

与直线 $x = 2$, 直线 $y = 0$ 所围成的曲边三角形, A 是 T 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体, 求 A 的体积。

七、(15 分) 证明方程

$$x^{18} + x^{12} - \cos x = 0$$

在实数集合中解的个数是 2。

八、(15 分) 设 \mathbb{R} 是实数集合, $D = [0, 1]$, $A: D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $B: D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 对于每个 $x \in D$ 有

$$0 \leq A(x) \leq 1$$

对于每个连续函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, 定义连续函数 $Tf: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$(Tf)(x) = B(x) + \int_0^x A(t)f(t) dt.$$

证明 $Tf = f$ 至多有一个连续函数解, 即: 如果 $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $Tf = f$, $Tg = g$, 则 $f = g: D \rightarrow \mathbb{R}$ 。