高等数学 A (II) 2023-2024 春季学期期末试题

考试时间：2024 年 6 月 13 日

一、（每题 5 分，共 15 分）回答下列问题，并简述理由（答案正确 1 分，陈述理由 4 分）

(1) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一给定数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$, 问级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的敛散性如何：

(a) 一定收敛，　(b) 一定发散，　(c) 敛散性不确定。

(2) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一给定数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$ 不存在，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的敛散性如何：

(a) 一定收敛，　(b) 一定发散，　(c) 敛散性不确定。

(3) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是一给定数列，$\lim\limits_{n\to+\infty} |na_n| = +\infty$，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的敛散性如何：

(a) 一定收敛，　(b) 一定发散，　(c) 敛散性不确定。

二、（每题 5 分, 共 10 分）试求幂级数的收敛半径：

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n, \qquad (2)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + (-2)^n + 3^n}{n(n+1)(n+2)} x^n.$$

三、（本题 10 分）求微分方程 $y'' + y' = x^2 + x$ 的通解.

四、（每题 5 分, 共 10 分）判断下列级数的敛散性：

$$(1)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}, \qquad (2)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

五、（本题 15 分）证明函数

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x \sin x}{\ln n} \right)^n$$

是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数。

六、（本题 10 分）已知 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 试计算

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, \mathrm{d}x \quad (-\infty < t < +\infty).$$

七、（本题 2+5+5=12 分）

(1) 写出 $\Gamma(s)$ 函数的表达式.

(2) 证明 $\Gamma(s)$ 函数在 $s \in (0, +\infty)$ 上连续.

(3) 用 Γ 函数表示积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\ \mathrm{d}x$, 并求极限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}\ \mathrm{d}x$.

八、（本题 7+6=13 分）设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

计算 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 区间上的 Fourier 展开式，并利用展开式证明：

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

九、（本题 5 分）证明：$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$.