高等数学 B (II) 2023-2024 春季学期期末试题

考试时间：2024 年 6 月 16 日

一、（10 分）求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域。

二、（10 分）在 $(-1,1)$ 上展开函数 $\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 为幂级数。

三、（10 分）求瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ 的值。（本题可用 B 函数和 Γ 函数。）

四、（10 分）判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

的敛散性。

五、（10 分）设 E 为实数。

(1)（5 分）求出所有的实数 E 使得 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}e^{-x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛。

(2)（5 分）求出所有的实数 E 使得 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}e^{-x}\right)\mathrm{d}x$ 收敛。（本小题可用 Γ 函数。）

六、（10 分）对于每个 $x\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$. 定义

$$f_1(x)=\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t, \qquad f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

证明 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛。

七、（15 分）设 b 是实数。

(1)（5 分）证明：含参变量 b 的无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

(2)（10 分）证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x = e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

八、（15 分）

(1)（10 分）设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数，$f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 e^x. 求出 $f(x)$ 的傅里叶级数，并且求出 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处的和。

(2)（5 分）求出级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ 的和。

九、（10 分）设级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，每项 $a_n>0$, T 是序列 $\{a_n\}$ 中最大项。对于每个实数 $x>0$，定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数。

(1)（2 分）证明 0 是 $L(x)$ 的瑕点。

(2)（8 分）证明：瑕积分 $\displaystyle\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，并且

$$\int_0^T L\left(x\right)\ \mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.$$