

# 高等数学 B (II) 2023-2024 春季学期期中试题

考试时间：2024 年 4 月 14 日

一、(10 分) 设  $L$  是  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ . 求第一型曲线积分

$$\int_L (3 + x) \, ds.$$

二、(10 分) 设  $E$  是

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$$

取逆时针方向。求第二型曲线积分

$$\int_E \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}.$$

三、(10 分) 设  $D$  是由直线  $y = 0, y = 2, y = x, y = x + 2$  所围成的  $\mathbb{R}^2$  中有界闭区域。求二重积分

$$\iint_D \left( \frac{1}{2}x - y \right) \, dx dy.$$

四、(10 分) 设  $\mathbb{R}^3$  中曲面

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}.$$

求第一型曲面积分

$$\iint_M x \, dS.$$

五、(10 分) 求出一阶常微分方程初值问题  $y' = x + y^2, y(0) = 0$  的皮卡序列的前两项  $y_1, y_2$ .

六、(10 分) 求出二阶常微分方程  $y'' - 2y' + y = e^x$  的通解。

七、(10 分) 设  $\mathbb{R}^3$  中有界闭区域  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 \leq z \leq 3 - 2x^2 - y^2\}$ ,  $S^-$  是  $V$  的边界曲面的内侧。求第二型曲面积分

$$\iint_{S^-} (x^2 + y \sin z) \, dy dz - (2y + z \cos x) \, dz dx + (-2xz + x \sin y) \, dx dy.$$

八、(15 分) 设  $r$  是正实数,  $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  连续,  $f(0) = 0$ ,  $f$  在 0 点可导, 对于每个  $t > 0$ , 定义

$$V(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \leq t^2 \right\}.$$

证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^5} \iiint_{V(t)} f \left( x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \right) \, dx dy dz = \pi f'(0).$$

九、(15 分) 求出所有的可导函数  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足

$$f'(x) = xf(x) + x \int_0^1 tf(t) \, dt.$$