北京大学数学分析II期末考试试题

2024年6月19 日

共 8 道大题, 满分 100 分

1. (本题 15 分) 分别考察函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(1-x)x^{n^2} \quad \text{和} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n(1-x)x^{n^3}$$

在 $[0,1)$ 上的一致收敛性.

2. (本题 15 分)

(1) 试求幂级数 $B(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}$ 的收敛半径 R (约定：$0!=1$).

(2) 证明$B(x)$ 在收敛区间$(-R,R)$ 内满足二阶常微分方程

$$xy''+y'(x)+xy(x)=0.$$

3. (本题 15 分) 考虑函数 $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 处的幂级数展开 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$;

(2) 确定幂级数的收敛域;

(3) 计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

4. (本题 15 分) 证明:

(1) 函数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2^n x)}{n!}$ 定义了一个 C^∞ 光滑的函数 $f(x)$.

(2) 求出函数 $f(x)$ 的 Maclaurin 级数表达式.

(3) 求出(2) 中的幂级数的收敛半径.

5. (本题 10 分) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{4n-1}x^{2n}$ 的和函数.

注：必要时可以直接应用结论 $\displaystyle\int_0^t \frac{u^2}{1-u^4}\,\mathrm{d}\,u=-\frac{1}{2}\arctan t+\frac{1}{4}\ln\frac{1+t}{1-t}$.

【转下页】

6. (本题 10 分) 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

计算 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 区间上的Fourier展开式，并利用展开式证明：

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

7. (本题 10 分) 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 一致收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛.

8. (本题 10 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 如果

$$|S_n(x)|=\left|\sum_{k=1}^{n}u_k(x)\right|\le M,\quad a\le x\le b,\quad n=1,2,\cdots,$$

则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上**有界收敛**.

现假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界收敛, $c\in(a,b)$, 且对任意 $\delta>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,c-\delta]$ 和 $[c+\delta,b]$ 上一致收敛, 如果 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 在 $[a,b]$ 上Riemann 可积, 那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也在 $[a,b]$ 上Riemann 可积, 而且

$$\int_a^b\Big(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\Big)\mathrm{d}\,x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}\,x.$$

【全卷完】