高数B第一次课 (10.28)

资料下载：<u>lwmath.github.io/Teaching/Teaching.html</u>

§1 极限的概念、性质

1. 序列极限的概念

定义 给定序列 $\{x_n\}$ 和常数 l，对于 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，s.t. $\forall n>N$，有

$$|x_n-l|<\varepsilon,$$

则称 n 趋于无穷时，x_n 以 l 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \quad 或 \quad x_n\to l,\ n\to\infty$$

常用方法

① 直接解不等式

$$|x_n-l|<\varepsilon$$

由此得 $n>f(\varepsilon)$ (或 $f(\varepsilon,l)$)，取 $N=[f(\varepsilon)]$.

② 先放大

$$|x_n-l|\le y_n,\quad y_n \text{ 简单，解 } y_n<\varepsilon$$

由此得 $n>f(\varepsilon)$，取 $N=[f(\varepsilon)]$.

③ 夹逼定理

$$c_n\le a_n\le b_n,\quad c_n, b_n\to l \Rightarrow a_n\to l.$$

④ 极限的四则运算.

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=a\pm b$， $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=ab$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}$，$b\neq 0$.

⑤ 利用重要极限.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$$

<u>序列极限存在的准则</u>

单调递增(减)且有上(下)界的序列必有极限.

二. 函数极限的概念.

掌握单侧极限、双侧极限的定义.(详见书P42).

<u>单侧极限与双侧极限的关系</u>

$\lim\limits_{x\to a}f(x)=l \iff \lim\limits_{x\to a+0}f(x)=l$ 且 $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=l$.

<u>无穷大量、无穷小量</u>.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

① $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A \iff f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是无穷小量.

② 若 u 是无穷大量，则 $\frac{1}{u}$ 是无穷小量、反之亦然.

<u>常用方法</u>

① 根据定义解不等式

② 夹逼定理

③ 极限四则运算.

④ 利用重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

三. 函数极限与序列极限的关系

海涅归结原理：设 $f(x)$ 在去心邻域 $\mathring{U}_r(x_0) := (x_0-r,\ x_0+r)\setminus\{x_0\}$ 上有定义，则极限 $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ 的充分必要条件是任意序列 $\{x_n\}\subset \mathring{U}_r(x_0)$，只要 $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ 都有 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

$\boxed{\text{例题}}$

例1. 使用 ε-N 定义证明极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1} = 0$.

证明. 只需证明 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N$, 有

$$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1} - 0\right| < \varepsilon.$$

注意到

$$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1}\right| \le \left|\frac{n^{\frac{2}{3}}}{n}\right| = \left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right| .$$

因此只需选取 N 使得 $\forall n>N$ 有 $\left|\frac{1}{n^{\frac{1}{3}}}\right|<\varepsilon$ 即可. 即

$$\frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} < \varepsilon \iff N > \frac{1}{\varepsilon^3}.$$

故取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon^3}\right]+1$. 则对于 $\forall n>N$, 有

$$\left|\frac{n^{\frac{2}{3}}\sin n}{n+1} - 0\right| < \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} < \varepsilon.$$

例2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 又设 $\{b_n\}$ 是有界序列, 即 $\exists M>0$, s.t. $|b_n| \le M$.

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明. 只需证明 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N$, 有

$$|a_n b_n - 0| < \varepsilon.$$

注意到

$$|a_n b_n| \le M|a_n| \quad , \forall n \ge 1.$$

于是仅由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 知 $\exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N$, 有

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

故得

$$|a_n b_n - 0| \le M|a_n| < \varepsilon, \quad \forall n>N.$$

例3. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^{n^2} = 0$.

证明. 由 $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^n = e^{-1}$ 知 $\exists N \in \mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N$ 有

$$(1-\frac{1}{n})^n < \frac{3}{2}e^{-1}.$$

于是便知

$$0 < (1-\frac{1}{n})^{n^2} < (\frac{3}{2e})^n$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{3}{2e})^n = 0$, 故由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n})^{n^2} = 0$.

练习 用上述方法证明 $\lim\limits_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n^2})^n = 1$.

例4. 设 $x_1>0$，且对一切 $n\in N$ 有 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值.

证明. 由 $x_1>0$ 易知 $\forall n\in N$, $x_n>0$. 再由基本不等式知

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})\geq 1.$$

注意到

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+\frac{1}{x_n})-x_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{x_n}-x_n)=\frac{1-x_n^2}{2x_n}\leq 0,$$

故数列 $\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$ 是单调递减序列，且有下界 1. 所以知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.
记 $x:=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，则有

$$x=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(x_n+\frac{1}{x_n})=\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}).$$

解得

$$x=1,\quad x=-1\ (舍去)$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

练习. 若 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$, $a>0$, $x_1>0$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

例5. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$, $\lim\limits_{x\to0}(1+\tan^2x)^{\frac{1}{\sin^2x}}$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[4]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

解 ① $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x+\cos x-1)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}(1+\sin x+\cos x-1)^{\frac{1}{\sin x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin x+\cos x-1}{x}}=e.$$

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+\tan^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = e.$

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1} \overset{y=\sqrt[6]{1+x}}{=\!=} \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^3-y}{y^2-1} = 1.$

例6. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，计算参数 a, b 的值.

解. 首先可得 $a>0$，否则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=+\infty\neq 0$，矛盾.

又注意到

$$\sqrt{x^2-x+1}-ax = \frac{x^2-x+1-a^2x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+ax} = \frac{(1-a^2)x^2-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+ax}$$

所以有 $1-a^2=0$，即 $a=1$. 此时有

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = -\frac{1}{2}.$$

故得 $b=-\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{练习}}$

1.(难) 设 $x_1>0$，$x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$，$n=1,2,\cdots$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. (提示：单调有界存在)

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)-3\sin x}{x^3}$ (不得使用洛必达法则. 提示：$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.)

§2 函数的连续性.

1. 连续的定义

单点连续. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. 左、右连续. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$，$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

$\varepsilon-\delta$ 语言：$\forall \varepsilon>0$，$\exists\, \delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$，s.t.

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,\quad \forall x:\ |x-x_0|<\delta.$$

反函数的连续性．$f:(a,b)\to(c,d)$ 既单又满且严格单调，则 f 是连续的，并且 f^{-1} 也是连续．

2. 间断点的分类．

(1) 第一类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$，$f(x_0)$ 存在，但至少有两个不相等．若 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0)$，则称其为可去间断点．

(2) 第二类间断点：$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ 至少有一个不存在．

序列化定义．设 $f(x)$ 在 $U_r(a)$ 有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续当且仅当任意序列 $\{x_n\}\subset U_r(a)$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 蕴含 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$．

3. 连续函数的性质．

(1) 有界性．$f(x)\in C[a,b]$，则 f 有界．

(2) 极值可达．

(3) 介值性．（零点存在定理）．

$\boxed{例题}$

例1．设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且 $f(x^2)=f(x)$，$\forall x>0$．证明 $f(x)$ 为常数．

证明．由 $f(x)=f(x^2)$ 知 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{2^2}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})\to f(1)$，$n\to\infty$．

例2. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续且 $f(x_0)>0$. 证明 $\exists\,\delta>0$, s.t. $\forall x: |x-x_0|<\delta$, 有 $f(x)>0$.

证明. 由 $f(x)$ 在 x_0 处连续知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$. 又 $f(x_0)>0$, 故由 $\varepsilon-\delta$ 定义知 $\exists\,\delta>0$, s.t. $\forall x: |x-x_0|<\delta$, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}f(x_0).$$

则有

$$f(x)>f(x_0)-\frac{1}{2}f(x_0)=\frac{1}{2}f(x_0)>0.$$

例3. 设函数 $f(x)\in C[0,1]$, 满足 $f(0)=f(1)$. 求证存在 $\alpha,\beta\in[0,1]$ 满足 $\beta-\alpha=\frac{1}{2}$, 且 $f(\alpha)=f(\beta)$.

证明. 令

$$F(x)=f(x)-f(x+\tfrac{1}{2}),\quad \forall x\in[0,\tfrac{1}{2}].$$

于是由 $f(0)=f(1)$ 知

$$F(0)=f(0)-f(\tfrac{1}{2})=-(f(\tfrac{1}{2})-f(0))=-(f(\tfrac{1}{2})-f(1))=-F(\tfrac{1}{2}).$$

即有

$$F(0)\cdot F(\tfrac{1}{2})\le 0,$$

故由介值定理知 $\exists\,\alpha\in[0,\frac{1}{2}]$, s.t. $F(\alpha)=0$, 即

$$f(\alpha)-f(\alpha+\tfrac{1}{2})=0.$$

再令 $\beta=\alpha+\frac{1}{2}$ 即可.

例4. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，且像集 $f([a,b])\subset[a,b]$，满足

$$|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\ \forall x,y\in[a,b].$$

证明由任意初值 $x_1\in[a,b]$ 以及递推公式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))$ 所定义的序列 $\{x_n\}$ 均存在极限.

证明. 由 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$ 易证 $f\in C[a,b]$. 故知 f 在 $[a,b]$ 有界. 因此 $\{x_n\}$ 是有界序列, 故欲证 $\{x_n\}$ 收敛, 只需证明 $\{x_n\}$ 单调. 注意到

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n+f(x_n))-\frac{1}{2}(x_{n-1}+f(x_{n-1}))$$
$$=\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})+\frac{1}{2}(f(x_n)-f(x_{n-1})),$$

于是便知

$$(x_{n+1}-x_n)(x_n-x_{n-1})=\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2+\frac{1}{2}(f(x_n)-f(x_{n-1}))(x_n-x_{n-1}).$$

又 $|f(x_n)-f(x_{n-1})|\le|x_n-x_{n-1}|$, 故得

$$|f(x_n)-f(x_{n-1})||x_n-x_{n-1}|\le|x_n-x_{n-1}|^2.$$

因此得

$$(x_{n+1}-x_n)(x_n-x_{n-1})\ge\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2-\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|^2=0$$

此即 $\{x_n\}$ 是单调序列. 于是便得 $\{x_n\}$ 存在极限, 且极限为

$$x=f(x)$$

落在 $[a,b]$ 中的根.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 设 $f(x) \in C(a,b)$ 且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 有界.

2. 设 $f(x)$ 在 $U_r(a)$ 有定义，对一切 $0<\delta<a$ 定义 $f(x)$ 在 $U_\delta(a)$ 的振幅

$$\omega(a,\delta) = \max_{x\in U_\delta(a)} f(x) - \min_{x\in U_\delta(a)} f(x).$$

证明 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续当且仅当 $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(a,\delta) = 0$.