高数B第二次课 (11.4)

§1. 微积分的基本概念

1. 导数的概念

定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

存在，则称 $f(x)$ 在 x 处可导，此极限值为导数或微商，$f'(x)$.

类似可定义左、右导数 $f'_-(x)$，$f'_+(x)$.

可导与连续的关系. 若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 反之则不一定成立. 例如 $f(x)=|x|$.

例1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，证明极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

存在，并求之.

证明. 注意到

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}$$

因为 $f'(x_0)$ 存在，故知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),\quad \lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{-\Delta x}=f'(x_0).$$

所以двух极限存在，且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}=\frac{1}{2}f'(x_0)+\frac{1}{2}f'(x_0)=f'(x_0).$$

练习. 举例说明上述命题反过来不成立.

2. 导数的基本公式及运算法则.

基本公式

- $(x^a)'=ax^{a-1}$
- $(a^x)'=a^x\ln a.$
- $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$
- $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}.$

四则运算

- $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},\ g(x)\neq 0.$

锁链法则（链式法则）

$$\frac{d}{dx}[f(\varphi(x))]=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x).$$

$$\left(\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\right).$$

隐函数求导法

反函数求导法 $[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)|_{x=f^{-1}(y)}}.$

参数式求导法 $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}.$

例2. 计算函数 $f(x) = x^{\sqrt{x}}$ 的导数.

解. 注意到

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}\ln x}.$$

记 $g(x) = \sqrt{x}\ln x$，则

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2).$$

于是由复合函数求导法则知

$$f'(x) = (e^{g(x)})' = e^{g(x)}g'(x)$$

$$= x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$$

$$= \frac{1}{2}x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln x + 2).$$

例3. 下列方程 y 是 x 的隐函数，求 y'.

(1) $e^{xy} = 3x^2y$ (2) $\arctan\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

解. (1) 两边求导得

$$e^{xy}(y + xy') = 6xy + 3x^2y'.$$

整理后得

$$y' = \frac{6xy - ye^{xy}}{xe^{xy} - 3x^2}.$$

(2) 等式两边求导得

$$\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x-y}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$$

得

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

高阶导数的计算方法

(莱布尼兹公式)

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

例4. 求下列函数的n阶导数.

(1) $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$ (2) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x$ (3) $f(x)=\frac{x^n}{1-x}$.

解. (1) 注意到

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

故知

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)^{(n)}$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

(2) 由三角函数变换知

$$\begin{aligned}\sin^4 x+\cos^4 x &= (\sin^2 x+\cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x \\ &= 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x \\ &= \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.\end{aligned}$$

于是知

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

(3)（若直接求导，较为麻烦，故可将 $f(x)$ 变形）. 注意到

$$\frac{x^n}{1-x}=\frac{x^n-1+1}{1-x}=-\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1\right)+\frac{1}{1-x}.$$

于是

$$f^{(n)}(x)=-\left(x^{n-1}+\cdots+1\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$$

$$=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

注．高阶导数公式：$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$，$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$

例5.（难）设 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的函数，且 $f'(0)$ 存在．

(1) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)\right)=\frac{1}{2}f'(0)$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

(1) 证明．利用微分的概念．由 $f'(0)$ 存在知

$$f(\Delta x)-f(0)=f'(0)\Delta x+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0.$$

于是对于 $\frac{k}{n^2}$，$k=1,2,\cdots,n$ 有

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)=f'(0)\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right),\quad n\to\infty.$$

所以得

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\right)f'(0)+\sum_{k=1}^{n}o\left(\frac{k}{n^2}\right),\quad n\to\infty.$$

又对于 $k=1,2,\cdots,n$ 有

$$o\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}o(1),\quad n\to\infty$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)=\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0)+\frac{n(n+1)}{2n^2}o(1),\quad n\to\infty$$

即得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n^2}\right)-nf(0)\right)=\frac{1}{2}f'(0).$$

(2) 经由(1)

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}\to e^{\frac{1}{2}(\ln(1+x))'|_{x=0}}=e^{\frac{1}{2}},\quad n\to\infty.$$

3. 不定积分

<u>定义</u>. 对于一个给定的函数，其全体原函数族称为 $f(x)$ 的不定积分，记作

$$\int f(x)\,dx.$$

<u>常见积分</u>

- $\int x^a\,dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C,\quad a\neq-1.$
- $\int\frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C.$
- $\int\cos x\,dx=\sin x+C$
- $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$

- $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

- $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$, $a \neq 1$.

- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$

- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln (x + \sqrt{1+x^2}) + C$

例6. 当 $x>1$ 时，验证下列结果.

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + C.$$

解. 只验证第二式. 直接求导得

$$\left(-\frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \quad (x>1).$$

练习. 上述两个等式是否矛盾? 为什么?

4. 定积分

定义. (黎曼和的极限) 极限

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

存在. 记作 $\int_a^b f(x)\,dx$.

可积性. (略)

(1) 必要条件. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积, 则 $f(x)$ 有界.

(2) 充分条件. 连续函数、单调函数、只有有限多个间断点的函数.

微积分基本定理. $f \in C[a,b]$, $F'(x) = f(x)$. 则

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

此公式又称为牛顿-莱布尼茨公式.

变限积分. $\int_a^x f(t)\,dt$ 或者 $\int_x^b f(t)\,dt$.

例 7. 求极限 $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2}$

解. 考虑拆分 $\frac{i}{n^2+i^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{i}{n}}{1+(\frac{i}{n})^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln(1+x^2)\Big|_0^1$$

$$= \ln\sqrt{2}.$$

例8. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2nk}\right)$.

解. 注意到

$$\frac{k}{n}-\frac{1}{2nk}\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right],\quad k=1,2,\cdots,n.$$

于是记 $\xi_k=\frac{k}{n}-\frac{1}{2nk}$ 可知所求极限可看作 $\sin x$ 在 $[0,1]$ 上的黎曼和. 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{2nk}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\xi_k$$

$$=\int_0^1\sin x\,dx$$

$$=-\cos x\Big|_0^1=1-\cos 1.$$

例9. 设 $x<1$, 求

$$g(x)=\int_0^{\sin x}\frac{1}{\sqrt{1-t^3}}\,dt$$

的导函数.

解. 利用变上限积分的导数公式及链式法则得

$$g'(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^3 x}}.$$

例10. 设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且 $|f(x)|\le L$, $\forall x\in[a,b]$. 证明变上限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

满足

$$|F(x_1)-F(x_2)|\le L|x_1-x_2|,\quad\forall x_1,x_2\in[a,b].$$

证明. 设 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 > x_2$, 则有

$$F(x_1) - F(x_2) = \int_a^{x_1} f(t)\,dt - \int_a^{x_2} f(t)\,dt$$

$$= \int_{x_2}^{x_1} f(t)\,dt.$$

于是

$$|F(x_1) - F(x_2)| \le \int_{x_2}^{x_1} |f(t)|\,dt \le L(x_1 - x_2).$$

同理可证 $x_1 < x_2$ 的情形.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 设 $f(x) = x^x$, 求 $f'(x)$.

2. 计算 n 阶导数.

(1) $f(x) = \sin^3 x$ (提示: $\sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x$)

(难) (2) $f(x) = x^{n-1}\ln x$ (提示: 若用莱布尼兹公式则有些复杂, 可考虑令 $f_n(x) = x^{n-1}\ln x$, 推导出 $f_n^{(n)}(x) = (n-1) f_{n-1}^{(n-1)}(x)$, 最后答案为 $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$).

3. 已知 $f'(2+\cos x) = \tan^2 x + \sin^2 x$, 求 $f(x)$ 的表达式.