高数B第三次课 (11.11)

§3. 积分的计算

例题

例1. (第一类换元法) 计算不定积分 $\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx$.

解. 注意到

$$\frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{\frac{1}{x^2}+1}{x^{-2}+x^2} = \frac{d(x-\frac{1}{x})}{2+(x-\frac{1}{x})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{d(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{1}{x}))}{1+(\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{1}{x}))^2}$$

于是令 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{1}{x})$ 得

$$\int \frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan y + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}(x-\frac{1}{x}) + C.$$

练习 计算不定积分 $\int \frac{1-x^2}{1+x^4}\,dx$.

例2. (第二类换元法) 计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

解. 令 $x=\frac{1}{2}\ln(t^2-1)$, 即 $t=\sqrt{1+e^{2x}}$. 于是有

$$dx = \frac{t}{t^2-1}\,dt.$$

则得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{t}{t^2-1}\,dt = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} + C$$

$$= \ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1) - x + C.$$

练习. 计算不定积分 $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$. （提示：令 $x=\tan t$）

例3.（分部积分）计算不定积分 $\int \sin\ln x\, dx$.

解. 直接分部积分得

$$\int \sin\ln x\, dx = x\sin\ln x - \int x(\cos\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$= x\sin\ln x - \int \cos\ln x\, dx$$

$$= x\sin\ln x - x\cos\ln x - \int x\sin\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

故移项后得

$$\int \sin\ln x\, dx = \frac{x}{2}(\sin\ln x - \cos\ln x) + C.$$

练习. 求积分 $\int e^{ax}\cos bx\, dx$. （提示：教材第三章第2节例5）.

例4（有理分式）. 求积分 $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

解. 设

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

则

$$2x^2+2x+13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2)$$

$$= A(x^4+2x^2+1) + (Bx^4+(-2B+C)x^3+(B-2C)x^2+(-2B+C)x-2C)$$

$$+ Dx^2+(-2D+E)x-2E$$

比较系数得

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2B+C=0 \\ 2A+B-2C+D=2 \\ -2B+C-2D+E=2 \\ A-2C-2E=13 \end{cases}$$

解得 $A=1,\ B=-1,\ C=-2,\ D=-3,\ E=-4$. 因此

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}.$$

注意到

$$\int \frac{x+2}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2\arctan x + C,$$

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx = \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + 4\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{2x}{x^2+1} + 2\arctan x + C$$

于是便知

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{x+2}{x^2+1}dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 4\arctan x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C.$$

练习. 验证 $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x + C$. (提示: 令 $x=\tan t$).

例5.（三角函数有理式）求 $\int \frac{1}{8-4\sin x+7\cos x}dx$.

解. 作万能替换 $t=\tan\frac{x}{2}$. 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

于是

$$\int \frac{dx}{8-4\sin t+7\cos x} = 2\int \frac{dt}{15-8t+t^2}$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t-3)(t-5)} = \int\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t-5}\right)dt$$

$$= \ln\left|\frac{t-3}{t-5}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}-3}{\tan\frac{x}{2}-5}\right| + C.$$

例6.（无理积分）求积分 $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$

解. 令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, 即 $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. 于是

$$dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt$$

所以

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x} = \int t\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt = -4\int\frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)}$$

$$= 2\int\frac{dt}{1+t^2} - \int\frac{dt}{1+t} - \int\frac{dt}{1-t}$$

$$= 2\arctan t + \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right| + C.$$

练习.(难) 求不定积分 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

提示. 令 $t = x+\sqrt{x^2-x+1}$, 则 $x = \frac{t^2-1}{2t-1}$. 于是

$$dx = \frac{2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2}\,dt.$$

代入得

$$\text{原式} = \int \frac{2(t^2-t+1)}{t(2t-1)^2}\,dt = \int \left(\frac{2}{t} - \frac{3}{2t-1} + \frac{3}{(2t-1)^2}\right) dt$$

$$= 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|2t-1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t-1} + C$$

$$= 2\ln\left|x+\sqrt{x^2-x+1}\right| - \frac{3}{2}\ln\left|2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1\right| - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2x+2\sqrt{x^2-x+1}-1} + C.$$

例17.(定积分的分部积分) 计算积分 $\int_0^1 x^5 \ln^3 x\,dx$.

解. 累次利用分部积分得

$$\int_0^1 x^5\ln^3 x\,dx = \frac{1}{6}x^6\ln^3 x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\ln^2 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x^5\ln^2 x\,dx$$

$$= -\frac{1}{12}x^6\ln^2 x\Big|_0^1 + \frac{1}{6}\int_0^1 x^5\ln x\,dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^1 x^5\ln x\,dx = \frac{1}{36}x^6\ln x\Big|_0^1 - \frac{1}{36}\int_0^1 x^5\,dx$$

$$= -\frac{1}{36}\int_0^1 x^6\,dx = -\frac{1}{216}.$$

例18.(定积分换元) 求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

解. 利用变量替换 $t=\sin x$ 得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

例 9. (变积分换元和积分中值定理). 设 I 是一个开区间, $f(x)\in C(I)$
设 $a,b\in I$ 且 $a<b$. 求证:

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = f(b)-f(a).$$

证明. 对积分作变量替换知

$$\int_a^b \frac{f(x+h)}{h}\,dx \xlongequal{y=x+h} \int_{a+h}^{b+h} \frac{f(y)}{h}\,dy.$$

于是

$$\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = \int_a^b \frac{f(x+h)}{h}\,dx - \int_a^b \frac{f(x)}{h}\,dx$$

$$= \int_{a+h}^{b+h} \frac{f(x)}{h}\,dx - \int_a^b \frac{f(x)}{h}\,dx$$

$$= \int_b^{b+h} \frac{f(x)}{h}\,dx - \int_a^{a+h} \frac{f(x)}{h}\,dx$$

由积分中值定理知 $\exists\, \xi_1\in[b,b+h],\ \xi_2\in[a,a+h]$ s.t.

$$\int_b^{b+h} \frac{f(x)}{h}\,dx = f(\xi_1), \quad \int_a^{a+h} \frac{f(x)}{h}\,dx = f(\xi_2)$$

因此

$$\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = f(\xi_1)-f(\xi_2).$$

由 f 的连续性知 $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$. 又 $\xi_1 \in [b, b+h]$，于是当 $h\to 0$ 时，有 $\xi_1 \to b$，故 $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi_1) = f(b)$. 同理 $\lim\limits_{h\to 0} f(\xi_2) = f(a)$. 所以知

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = \lim_{h\to 0}(f(\xi_1)-f(\xi_2)) = f(b)-f(a).$$

例10. 计算 $\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx$

解. 利用三角换元. 令 $x=\sin t$，$t\in[0,\frac{\pi}{2}]$. 则

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cdot\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 t\,dt$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{32}.$$

注. 沃利斯公式：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt = \begin{cases}\frac{(n-1)!!}{n!!} & n\text{ 为奇数}\\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2} & n\text{ 为偶数}\end{cases}$

例11. (奇偶性) 计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\,dx$.

解. 注意到 $\frac{x^2\arcsin x}{1+x^2}$ 是奇函数，故

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2(1+\arcsin x)}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = 2x - 2\arctan x\Big|_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}.$$

定积分几何应用公式

- 曲线弧长.

$$L = \int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_\alpha^\beta\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,d\theta.$$

(实际上可以只记参数方程的形式)

• 旋转体的体积和侧面积.

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx \qquad S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

• 平面图形的面积.

$$S = \int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \qquad S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta.$$

例12. 求直角坐标系的抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,\frac{1}{2})$ 之间弧长.

解. 直接利用弧长计算公式得

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x+\sqrt{1+x^2})\right)\Big|_0^1$$

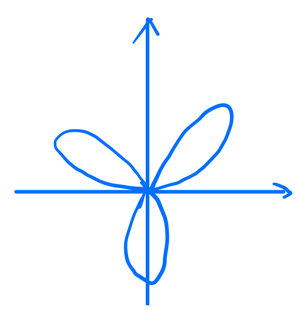
$$= \frac{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}{2}.$$

例13. 给定奇数 $n\geq 3$, n 叶玫瑰线由极坐标方程 $r=\sin n\theta$ 定义, 求 n 叶玫瑰线所围部分的面积.

解. 注意到每一叶玫瑰线面积相等, 故

$$S = \frac{n}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2 n\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 y\,dy = \frac{\pi}{4}.$$



$n=3$.

例14. (综合性质) 设 $f\in C^1[0,1]$, 求证对于 $\forall x\in[0,1]$ 有

$$|f(x)| \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt + \int_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

证明. 由积分中值定理知 $\exists \xi\in[0,1]$, s.t.

$$\int_0^1 |f(t)|dt = |f(\xi)|.$$

于是只需证明 $\forall x\in[0,1]$ 有

$$|f(x)| \le |f(\xi)| + \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

不妨假设 $\xi\ge x$，于是

$$\int_0^1 |f'(t)|dt \ge \int_x^{\xi} |f'(t)|dt \ge \left|\int_x^{\xi} f'(t)dt\right| = |f(\xi)-f(x)|$$

再由三角不等式得

$$\int_0^1 |f'(t)|dt \ge |f(x)-f(\xi)| \ge |f(x)|-|f(\xi)|.$$

例15. 设 $f(x)$ 是 $[0,\pi]$ 的连续函数，且

$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)\cos x\, dx = 0.$$

求证 $f(x)$ 至少有两个零点.

证明. 令

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt, \qquad x\in[0,\pi].$$

于是 $F(0)=F(\pi)=0$. 又由分部积分得

$$0=\int_0^{\pi} f(x)\cos x\, dx = F(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} F(x)\sin x\, dx$$

即

$$\int_0^{\pi} F(x)\sin x\, dx = 0.$$

于是知 $\exists\,\xi\in(0,\pi)$, s.t. $F(\xi)\sin\xi=0$. 又 $\sin\xi\ne0$, 则得 $F(\xi)=0$.

因此有

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0,$$

所以 $\exists\ x_1\in(0,\xi),\ x_2\in(\xi,\pi)$, s.t. $f(x_1)=f(x_2)=0$. 故 $f(x)$ 至少有两个零点.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 若 $f(x)\in[a,b]$ 单调递增，证明: $\int_a^b x f(x)\,dx \geq \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$.

提示. 分别对 $\int_a^{\frac{a+b}{2}}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\,dx$ 和 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)$ 使用积分中值定理，然后再利用 $f(x)$ 的单调递增性.

2. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(1-x^2)^n\,dx=0$.

提示: 将区间分成两部分考虑. 取任意小的 $\delta\in(0,1)$，有

$$\begin{aligned}\int_0^1(1-x^2)^n\,dx &= \int_0^\delta(1-x^2)^n\,dx+\int_\delta^1(1-x^2)^n\,dx\\ &\leq \int_0^\delta 1\,dx+\int_\delta^1(1-\delta^2)^n\,dx\\ &= \delta+(1-\delta^2)^n(1-\delta)\to\delta,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

3. 计算不定积分 $\int\frac{\sin x}{\sin x-\cos x}\,dx$ （提示: $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})$）

4. (难) 计算不定积分 $\int\frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,dx$

提示. 原式 $=\int\frac{e^x(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})^2}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\frac{1}{2}\int e^x(1+\tan\frac{x}{2})^2\,dx$

(将2次方写开)→ $=\frac{1}{2}\int e^x(1+\tan^2\frac{x}{2})\,dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int e^x\sec^2\frac{x}{2}\,dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}\,dx$

(分部积分)→ $=e^x\tan\frac{x}{2}-\int e^x\tan\frac{x}{2}\,dx+\int e^x\tan\frac{x}{2}\,dx$

$=e^x\tan\frac{x}{2}+C.$