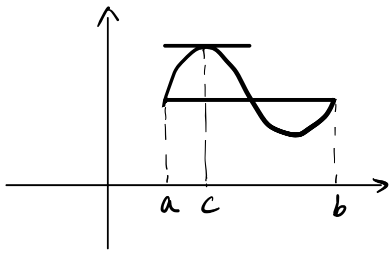
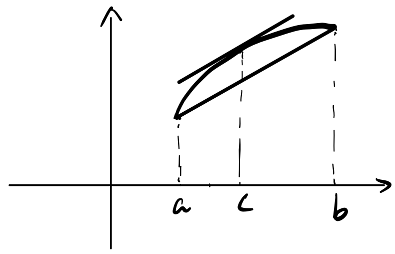
高数 B 第四次课 (11.25)

§4. 微分中值定理与泰勒公式

1. 微分中值定理.

<u>罗尔中值定理.</u> 设 $f\in C[a,b]$ 且 f 在 (a,b) 内可导, 若 $f(a)=f(b)$, 则 $\exists\, c\in(a,b)$, s.t. $f'(c)=0$.





<u>拉格朗日微分中值定理.</u> 设 $f\in C[a,b]$, 且 f 在 (a,b) 可导, 则必存在一点 $c\in(a,b)$ 使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

<u>注.</u> 有时上述公式也会写为

$$f(x+h)=f(x)+f'(x+\theta h)h.$$

<u>柯西微分中值定理.</u> 设 $f\in C[a,b]$, $g\in C[a,b]$, 且 f,g 在 (a,b) 内可导. 且 $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$, 则必存在一点 $c\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. 洛必达法则.

<u>定理.</u> 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都在 $x=a$ 的某个邻域内可导 (这里 a 可以是

∞，邻域也可以是单侧的)，且 $g'(a)\neq 0$. 满足：

(1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ；　　(2) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

则如果 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$，那么 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$、

3. 泰勒公式.

带皮亚诺余项的：设 $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，并在 x_0 点有 n 阶导数，$n\geq 1$，则在 x_0 点附近有下列展式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o(|x-x_0|^n) \quad , \quad x\to x_0.$$

特别地，$x_0=0$ 时，上述泰勒公式也称作马克劳林公式.

带拉格朗日余项的. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，则对 (a,b) 中任意取定的一点 x_0 及 $\forall x\in(a,b)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中 ξ 是介于 x_0 与 x 之间的某一点.

带积分余项的 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，则对 (a,b) 中任意取定的一点 x_0 及 $\forall x\in(a,b)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

带柯西余项的 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数，则对 (a,b) 中任意取定的一点 x_0 及 $\forall x\in(a,b)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}.$$

常见初等函数带拉格朗日余项的泰勒公式.

(1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad , \quad (-\infty < x < +\infty).$

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{\cos\xi}{(2n)!} x^{2n+1}$, $(-\infty < x < +\infty)$.

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{\sin\xi}{(2n+2)!} x^{2n+2}$, $(-\infty < x < +\infty)$.

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$, $(-1 < x < +\infty)$.

例题

例1. 求证：方程 $2^x + 2x^2 + x - 1 = 0$ 至多只有两个根.

证明. 利用反证法. 记 $f(x) = 2^x + 2x^2 + x - 1$. 假设 $f(x)$ 至少存在三个零点 $a<b<c$. 则由罗尔中值得 $\exists\ \xi_1 \in (a,b)$, $\xi_2 \in (b,c)$, s.t.

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0.$$

再利用罗尔中值知 $\exists\ \eta \in (\xi_1, \xi_2)$, s.t. $f''(\eta) = 0$. 而

$$f''(x) = 2^x(\ln 2)^2 + 4 > 0,$$

矛盾. 故 $f(x) = 0$ 至多只有两个根.

例2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,b]$ 上二阶可导，并且 $g'(x) \neq 0$ 对一切 $x \in (a,b)$ 成立.
求证：$\exists\ \xi \in \mathbb{R}$, s.t. $\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

证明. 令

$$H(x) = f(x)g(x) - f(a)g(x) - f(x)g(b), \quad \forall x \in [a,b].$$

则 $H(a) = H(b) = -f(a)g(b)$. 由罗尔中值知 $\exists\ \xi \in (a,b)$, s.t. $H'(\xi) = 0$. 又

$$H'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(a)g'(x) - f'(x)g(b).$$

故得

$$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例3. 证明：$\forall x\in\mathbb{R}$，$\exists\, \theta(x)\in(0,1)$，s.t.

$$\arctan x = \frac{x}{1+\theta(x)^2x^2}.$$

证明. 对于 $\forall x>0$，函数 $\arctan t$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 上可导，故由拉格朗日微分中值定理得 $\exists\,\theta(x)\in(0,1)$，s.t.

$$\arctan x-\arctan 0=(\arctan t)'\Big|_{t=\theta(x)x}(x-0).$$

即

$$\arctan x=\frac{x}{1+\theta(x)^2x^2}.$$

对于 $\forall x<0$，定义

$$\theta(x)=\theta(-x).$$

因此

$$\arctan x=-\arctan(-x)=-\frac{-x}{1+\theta(-x)^2(-x)^2}=\frac{x}{1+\theta(x)^2x^2}.$$

对于 $x=0$，容易验证 $\theta(0)=0$.

例4. 设 $f\in C[0,1]$，且 f 在 $(0,1)$ 内可导，$f(1)=0$. 求证：$\exists\,\xi\in(0,1)$，s.t. $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

证明. 令

$$F(x)=xe^{-x}f(x),\quad \forall x\in[0,1].$$

由 $f(1)=0$，知 $F(1)=0$. 又 $F(0)=0$，故由罗尔中值定理知 $\exists\,\xi\in(0,1)$，s.t. $F'(\xi)=0$. 又

$$F'(x)=xe^{-x}f'(x)+(e^{-x}-xe^{-x})f(x).$$

由此得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

例5. 设 $f\in C[0,1]$，在 $(0,1)$ 上可导. $f(0)=f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$. 求证对于任意实数 λ，均存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

证明. 令

$$F(x)=e^{-\lambda x}(f(x)-x),\quad \forall x\in[0,1].$$

注意到 $f(1)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，我们得到

$$F(1)=-e^{-\lambda}<0,\qquad F(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\lambda}>0$$

故 $\exists\, x_0\in(\frac{1}{2},1)$，s.t. $F(x_0)=0$. 又 $F(0)=0$. 于是由罗尔中值得 $\exists\,\xi\in(0,x_0)$ s.t. $F'(\xi)=0$. 又

$$F'(x)=e^{-\lambda x}(f'(x)-1)-\lambda e^{-\lambda x}(f(x)-x),$$

故得 $f'(\xi)-\lambda(f(\xi)-\xi)=1$.

例6. 计算下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

解. (1) 利用泰勒展开求极限、注意到

$$\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}=\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)\right)=\frac{\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{3}+o(1),\quad x\to0.$$

于是便知

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\tan x}{x}}=e^{\frac{1}{3}}.$$

注. 本题也可使用洛必达法则，但是计算略显繁琐.

(2) 注意到

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+x)-\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x^2}\left(x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}+o(1)},\ x\to 0.$$

从而由海涅归结原理知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{e^n} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x^2}}}{e^{\frac{1}{x}}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

(3)（可用泰勒展开，这里我们采用洛必达法则）.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)+\tan x}{4x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos x+\sec^2 x}{12x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)+\sec^3 x}{12x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos x+3\sec^3 x\tan x}{24x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)+3\sec^4 x\tan x}{24x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)\cos x+12\sec^4 x\tan^2 x+3\sec^6 x}{24}$$

$$= \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

注. 此题用泰勒展开会简洁一些，但是对掌握不牢的同学来说容易遗漏项，故用洛必达来展示此题.

例7. 写出函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的马克劳林公式，然后计算 $y^{(n)}(0)$.

解. 注意到

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

于是由麦克劳林公式知

$$y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)\cdots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(x^2)^n + o(x^{2n})$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} x^{2k} + o(x^{2n}).$$

则有

$$y = x + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!\,(2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

所以知

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n=2k,\ k\geq 0 \\ 1, & n=1 \\ (-1)^k[(2k-1)!!]^2, & n=2k+1,\ k\geq 1. \end{cases}$$

例8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 二阶可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在有限，$f''(x)$ 有界.
求证：$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

证明. 由泰勒展开知 $\forall x \in [a,+\infty)$，$\exists\, \xi \in (x, x+h)$ 有

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(\xi)}{2}h^2$$

于是

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} + \frac{|f''(\xi)|}{2}h.$$

由 $f''(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界知 $\exists\, M>0$, s.t. $|f''(x)|\leq M$, $\forall x\in[a,+\infty)$. 故

$$|f'(x)| \leq \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h} + \frac{M}{2}h.$$

再由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在知

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x+h)-f(x)\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x+h) - \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

于是便知

$$\lim_{x\to+\infty} |f'(x)| \le \frac{M}{2}h.$$

因为 $h>0$ 的任意性，故知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

练习. 若不加二阶导数有界的条件，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 不一定成立.

例9. 求出闭区间上的一元函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值的所有 $[-1,1]$ 上的点.

解. 直接求导得

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}.$$

注意到 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，且 $f(0)=1$. 求 $f'(x)=0$ 的稳定点得

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$x^{-\frac{4}{3}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{3}}$$

$$x^4 = (x^2-1)^2$$

$$x^2 = 1-x^2$$

得

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

又

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} > 1 = f(1) = f(-1) = f(0)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{4} > 1 = f(1) = f(-1) = f(0).$$

因此 $f(x)$ 的最大值在 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 处达到，最小值在 $x=\pm 1, 0$ 处达到。故达到最小值的所有 $[-1,1]$ 上的点为 $-1, 0, 1$.

例10 考虑在 $[a,b]$ 上的二阶线性常微分方程边值问题:

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=0, & a<x<b. \\ y(a)=y(b)=0. \end{cases}$$

若 $q(x)<0$ 对一切 $x\in(a,b)$ 成立，证明：$y(x)\equiv 0$.

证明 反证，假设 $y(x)$ 不恒为 0，则 $\max\limits_{x\in[a,b]} y(x)>0$ 或 $\min\limits_{x\in[a,b]} y(x)<0$.

由于 $y(a)=y(b)=0$，故不妨设 $\exists\, x_0\in(a,b)$, s.t. $y(x_0)=\max\limits_{x\in[a,b]} y(x)>0$.

由极值的必要条件知

$$y'(x_0)=0, \qquad y''(x_0)\le 0.$$

又

$$y''(x_0)+p(x_0)y'(x_0)+q(x_0)y(x_0)=0.$$

即

$$0\ge y''(x_0)=-q(x_0)y(x_0)>0,$$

矛盾。于是便知 $\max\limits_{x\in[a,b]} y(x)=0$，同理有 $\min\limits_{x\in[a,b]} y(x)=0$，故 $y\equiv 0$.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_k>0$.
2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-2+x^4}{\sin^4 x}$
3. 求函数 $f(x)=(\sin x)^{\frac{2}{3}}+(\cos x)^{\frac{2}{3}}$ 在闭区间 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值.