高数B第五次课（12.9）

§5 解析几何

1. 向量代数

内积：$\vec{a},\vec{b}$是两个非零向量，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积定义为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

叉乘：$\vec{a},\vec{b}$是两个非零向量，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的叉乘满足

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

混合积：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$为三个向量，则混合积表示为

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

2. 平面与直线方程

点法式方程：给定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$，对任一点$A:(x,y,z)$有$\vec{n}\cdot\vec{PA}=0$.
记$\vec{n}=(A,B,C)$，则

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$.

三点式方程：平面上三个不共线的点(x_i,y_i,z_i)，$i=1,2,3$. 则

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

截距式方程：平面在三个坐标轴截距为 A, B, C，则

$$\frac{x}{A}+\frac{y}{B}+\frac{z}{C}=1$$

两平面平行：$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=0$.　　**垂直**：$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$.

两面式方程：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

标准方程：

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

参数方程：

$$\begin{cases} x=x_0+ta \\ y=y_0+tb \\ z=z_0+tc \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}$$

3. 空间曲线

$$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

切线　$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$ 在 $\vec{r}(t_0)$ 处切线标准方程为

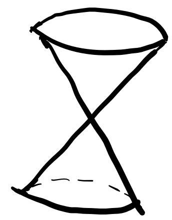
$$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$$

法平面：$x'(t_0)(x-x(t_0))+y'(t_0)(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0$.

弧长：$S=\int_\alpha^\beta|\vec{r}'(t)|\,dt=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt$.

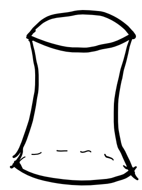
4. 二次曲面

椭圆锥面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

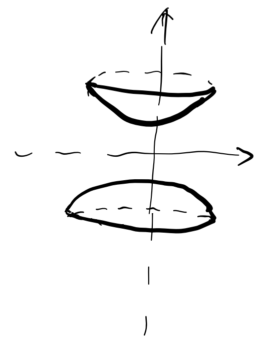


椭球面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

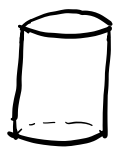
单叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$



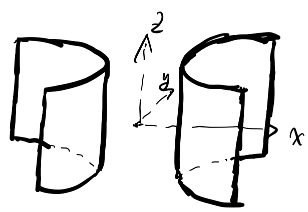
双叶双曲面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$



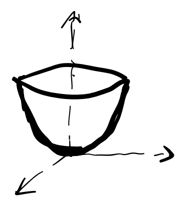
椭圆柱面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.



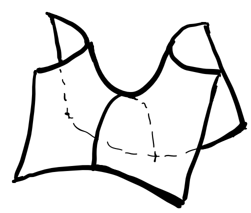
双曲柱面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.



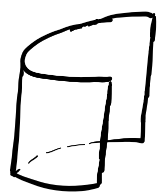
椭圆抛物面: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-z=0$.



双曲抛物面: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-z=0$



抛物柱面: $\frac{x^2}{a^2}-y=0$



例题

例1. 设有两直线

$$L_1:\ \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1},\qquad L_2:\ \frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}.$$

(1) 证明 L_1 与 L_2 是异面直线.

(2) 求同时平行于 L_1, L_2 且与它们等距的平面方程.

解. (1) 直线 L_1, L_2 分别过 $M_1(1,0,-1)$, $M_2(-2,1,2)$. 又

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(l_1\times l_2)=\begin{vmatrix}-3&1&3\\-1&2&1\\0&1&-2\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

故知 L_1 与 L_2 异面.

(2) 注意到

$$l_1\times l_2=\begin{vmatrix}i&j&k\\-1&2&1\\0&1&-2\end{vmatrix}=(-5,-2,-1).$$

故可设 π 的方程为

$$5x+2y+z+D=0.$$

又由点到平面的距离公式得

$$|5\times1+2\times0+1\times(-1)+D|=|5\times(-2)+2\times1+1\times2+D|$$

即得

$$|4+D|=|-6+D|$$

得

$$D=1,$$

故 π 的方程为

$$5x+2y+z+1=0.$$

例2. 求原点关于平面 π:

$$6x+2y-9z-121=0$$

的对称点.

解. 过原点作 π 的垂线:

$$x=6t,\quad y=2t,\quad z=-9t.$$

代入平面方程得

$$36t+4t+8(t-12)=0,$$

得 $t=1$，于是知直线与平面的交点为 $(6,2,-9)$。设原点关于交点的对称点为 (x_0,y_0,z_0)，则交点 $(6,2,-9)$ 为原点与其对称点的中点，于是

$$\frac{x_0+0}{2}=6,\qquad \frac{y_0+0}{2}=2,\qquad \frac{z_0+0}{2}=-9.$$

得

$$(x_0,y_0,z_0)=(12,4,-18).$$

练习： 求 $M_1(4,3,10)$ 关于直线 L：

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5}$$

的对称点。（提示：类似例2，求出交点然后求平均）。

例3. 已知平面不通过点 $(1,2,0)$ 且在 x 轴，y 轴，z 轴的截距成等差数列，又知三截距之和为12，求平面的方程。

解：设所求平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

于是知

$$\begin{cases}a+c=2b\\ a+b+c=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c=8\\ b=4.\end{cases}$$

又点 $(1,2,0)$ 在平面上，故知

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{4}+\frac{0}{c}=1.$$

则 $a=2$. 故有 $c=6$. 由此知平面方程为

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{6}=1.$$

例4. 求两直线

$$L_1:\ \frac{x-3}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$$

$$L_2:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$$

间的距离.

解. 两直线的方向向量分别为

$$l_1=(2,4,3),\qquad l_2=(2,0,1).$$

又分别过点

$$M_1(3,0,0),\qquad M_2(-1,3,2).$$

于是

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(l_1\times l_2)=\begin{vmatrix}-4&3&2\\2&4&3\\2&0&1\end{vmatrix}=-20\neq 0.$$

故 L_1 与 L_2 是异面直线, 所以它们之间的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(l_1\times l_2)|}{|l_1\times l_2|}=\frac{20}{\sqrt{96}}=\frac{5}{\sqrt{6}}.$$

例5. 设有二元二次方程

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0.$$

(1) 证明上述方程是球面方程并求球心坐标与球的半径.
(2) 写出通过点 $M_0(0,-1,\sqrt{2})$ 的球面的切平面方程.

解 (1) 用配方法改写方程得

$$(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=2^2.$$

故球心为 $Q=(1,-2,0)$，半径为 2.

(2) 点 $M_0(0,-1,\sqrt{2})$ 在球面上，于是和 $\overrightarrow{QM_0}=(-1,1,\sqrt{2})$ 为 M_0 点处的法向量，则切平面方程为

$$-x+(y+1)+\sqrt{2}(z-\sqrt{2})=0,$$

即

$$x-y-\sqrt{2}z+1=0.$$

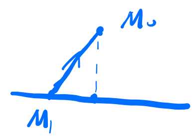
例6 求 $(2,1,3)$ 到平面 $2x-2y+z-3=0$ 的距离.

解. 利用点到平面距离公式得

$$d=\frac{|2\times2-2\times1+1\times3|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{2}{3}.$$

例7 求点 $(3,4,5)$ 到直线 $\frac{x}{1}=\frac{y-4}{-3}=\frac{z-3}{-2}$ 的距离.

解. 直线的方向向量为 $l=(1,-3,-2)$. 在直线上任取一点 $M_1(0,4,3)$，由 $M_0(3,4,5)$ 得



$$\overrightarrow{M_1M_0}=(3,0,2).$$

于是便得

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_1M_0}\times l|}{|l|}=\frac{1}{\sqrt{14}}|(6,8,-9)|=\frac{\sqrt{189}}{\sqrt{14}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

例8 设 $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 是一条光滑曲线，满足 $|\vec{r}(t)|=c$ 对定义域中的 t 都成立，其中 c 是非零常数. 求证: $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0$.

证明. 由 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t)=c$ 直接求导得 $2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0$，即 $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}'(t)=0$.