高数B第六次课（12.23）

§6 多元函数微分学

1. 二元函数的极限

定义：$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，s.t. 当

$$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

时有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 (x,y) 趋近于 (x_0,y_0) 时 $f(x,y)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

基本性质 与一元函数类似.

累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

2. 二元函数的连续性

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

性质与一元函数类似.

3. 偏导数与全微分

定义. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内有定义，将 y 固定为 y_0. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限值为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处关于 x 的偏导数，记作

$$f_x(x_0,y_0),\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} \text{ 或 } \left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}.$$

类似地，可以定义关于 y 的偏导数.

高阶偏导数. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ ...

定理. 若 f_{xy} 和 f_{yx} 连续，则 $f_{xy} = f_{yx}$.

全微分.

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \quad \rho \to 0$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的全微分，记作 dz，即

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

定理. 若函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处必连续.

定理. 可微可得可导，且 $A = f_x$, $B = f_y$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

可微的充分条件. f_x, f_y 在 (x_0,y_0) 的某个邻域内存在且这两偏导数在 (x_0,y_0) 处连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

复合函数求导. 链锁法则或链式法则. $z = f(u,v)$, $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

一阶微分形式不变性. $dz = f_u du + f_v dv$.

4. 方向导数与梯度.

$\vec{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t}$ 存在，记作 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}$.

则有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x\cos\alpha+f_y\sin\alpha.$$

梯度. $\operatorname{grad}f=(f_x,f_y)$. $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad}f\cdot l$.

5. 中值定理与泰勒公式.

定理. $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+\operatorname{grad}f(\xi)\cdot(\Delta x,\Delta y)$. $\xi=(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y)$.

记号: $d^kf(x,y)=(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y})^kf(x,y)$.

泰勒公式: $f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta\Delta x,\ y_0+\theta\Delta y).$$

6. 隐函数存在定理.

(1) $F(x_0,y_0)=0$

(2) $F_x(x_0,y_0)$, $F_y(x_0,y_0)$ 连续且 $F_y(x_0,y_0)\neq0$.

则 $\exists\ y=f(x)$, $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, s.t. $F(x,f(x))=0$ 且

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}.$$

7. 极值问题

拉格朗日乘数法. $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$.

$\boxed{\text{例题}}$

例1. 讨论二元极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} (x^2+y^2)e^{-|x|-|y|}$.

解. 注意到

$$(|x|+|y|)^2 = x^2+y^2+2|x||y| \geq x^2+y^2$$

于是便知

$$(x^2+y^2)e^{-|x|-|y|} \leq (x^2+y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \to 0, \quad \sqrt{x^2+y^2} \to +\infty.$$

例2. 讨论二元极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

解. 考虑 $y=0$, 此时

$$\lim_{x\to0} \frac{0}{x^4} = 0.$$

而考虑 $y=x^2$ 时有

$$\lim_{x\to0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

故二元极限不存在.

例3. 证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在原点不连续, 但其在 $(0,0)$ 处的偏导数存在.

证明：当动点 $y=kx$ 趋于原点时，我们有

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0}\frac{2kx^2}{(1+k^2)x^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

当 k 取不同值时，上述极限值不相同，因而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，所以知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续。

由定义知

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0.$$

从而得 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的偏导数都存在。

例4. 证明函数

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0)$ 处可微。

证明. 易知 $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. 按定义有

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\left|xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \to 0, \quad \sqrt{x^2+y^2}\to 0.$$

例5. 证明

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$$

在 $(0,0,0)$ 处不可微.

证明. 易知 $f_x(0,0,0)=f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=0$，于是由定义知

$$\frac{|f(x,y,z)-f(0,0,0)-f_x(0,0,0)x-f_y(0,0,0)y-f_z(0,0,0)z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

而通过取路径 $y=z=0$ 及 $x=y=z$ 知上述极限不存在，所以不可微.

例6 证明对任意给定的实数 p，存在点1的开邻域 U，点1的开邻域 W 以及唯一的函数 $y=f(x)$，$x\in U$，$f(x)\in W$ 使得 $x^p+y^p-2xy=0$.

证明. 令 $F(x,y)=x^p+y^p-2xy$，则知

(1) $F(1,1)=0$.

(2) F_x，F_y 在 $(1,1)$ 处邻域连续的，且 $F_y(1,1)=py^{p-1}-2x\big|_{(1,1)}$

$=p-2$.

故当 $p\neq 2$ 时，由隐函数定理知存在 $y=f(x)$，s.t. $F(x,f(x))=0$.

当 $p=2$ 时，知 $y=x$ 满足条件.

例7. 求 $f(x,y)=\ln(1+x+y)$ 在点 $(0,0)$ 附近的泰勒公式，展开到三次.

解. 由一元泰勒展开知

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3+o(z^3).$$

于是取 $z=x+y$ 得

$$\ln(1+x+y)=x+y-\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{3}(x+y)^3+o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}})$$

$$=x+y-\frac{1}{2}x^2-xy-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}x^3+x^2y+xy^2+\frac{1}{3}y^3+o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}).$$

例8. 求 $f(x,y)=xe^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 点附近的泰勒公式, 展开到三阶.

解. 类似例7首得

$$e^{x+y}=1+x+y+\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+o(x^2+y^2).$$

于是同乘 x 后得

$$xe^{x+y}=x+x^2+xy+\frac{1}{2}x^3+x^2y+\frac{1}{2}xy^2+o((x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}).$$

例9. 求 $f(x,y)=xe^{x+y}$ 各个三阶偏导数在 $(0,0)$ 处的值.

解. 由泰勒展开的唯一性以及三次项为

$$\frac{1}{6}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(0,0)$$

即

$$\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)\,x^2y+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)\,xy^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)\,y^3.$$

所以知

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0,0)=3,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(0,0)=2,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(0,0)=1,\quad \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(0,0)=0.$$

例10. 求三维空间的曲线 $\begin{cases} x-y+4z=1 \\ 2x^2+4y^2=3 \end{cases}$ 最高点和最低点高度差.

解. 即求 $f(x,y,z)=z$ 在约束条件 $\varphi_1(x,y,z)=x-y+4z-1=0$ 和 $\varphi_2(x,y,z)=2x^2+4y^2-3=0$ 下的最大值和最小值之差. 构造辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=z+\lambda(x-y+4z-1)+\mu(2x^2+4y^2-3)$$

直接求偏导得

$$\begin{cases} F_x = \lambda + 4x\mu = 0 \\ F_y = -\lambda + 8y\mu = 0 \\ F_z = 1 + 4\lambda = 0 \\ F_\lambda = x - y + 4z - 1 = 0 \\ F_\mu = 2x^2 + 4y^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} (x,y,z,\lambda,\mu) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right) \\ (x,y,z,\lambda,\mu) = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right) \end{cases}$$

于是高度差为 $\frac{5}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 求二元极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5y^3}{x^8+y^8}$.　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+\sin y)\cos\dfrac{1}{|x|+|y|}$.

2. 已知函数 $z(x,y)$ 满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\sin y + \dfrac{1}{1-xy} \\ z(0,y) = 2\sin y + y^2. \end{cases}$$

求 $z(x,y)$ 的表达式.

3. 用求极值的方法求椭圆 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 的长半轴与短半轴.

4. 设 $a,b\in\mathbb{R}$ 且 $b\neq 0$, 求出二元函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在 (a,b) 处的泰勒公式, 展开到二次.