数分III习题课 (9.21)

1. 若 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k|=+\infty$，则称 $\mathbb{R}^n$ 中的点列 $\{x_k\}$ 趋于 ∞. 现在设点列 $\{x_k=(x_{k,1},\cdots,x_{k,n})\}$ 趋于 ∞，试判断下列命题是否正确.

(1) 对于 $\forall i\in\{1,2,\cdots,n\}$，序列 $\{x_{k,i}\}$ 趋于 ∞；

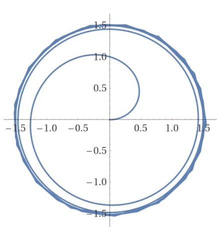
(2) $\exists i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$，序列 $\{x_{k,i_0}\}$ 趋于 ∞.

解. 结论均是否定的. 例如点列 $\{x_k=(x_{k,1},\cdots,x_{k,n})\}$:

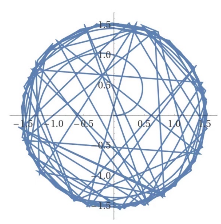
$$x_{k,i}:=\begin{cases}k, & k\equiv i\ (\mathrm{mod}\ n).\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

2. 求 $E=\{(r\cos\tan\frac{\pi}{2}r,\ r\sin\tan\frac{\pi}{2}r):\ r\in[0,1)\}$ 的聚点集.

解. $E'=E\cup\{(x,y):\ x^2+y^2=1\}$. 示意图如下:



$0\le\frac{\pi}{2}r\le 1.54$



$0\le\frac{\pi}{2}r<\frac{\pi}{2}$

3. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，证明:

(1) $\bar{E}=E^\circ\cup\partial E$；　　(2) $E'=\bar{E}'$.

证明: (1) 由 $(\bar{E})^c=(E^c)^\circ=(E^\circ\cup\partial E)^c$ 知 $\bar{E}=E^\circ\cup\partial E$.

(2) 由 $\bar{E}'=(E\cup E')'=E'\cup(E')'$ 知只需证 $(E')'\subset E'$.

事实上，对 $\forall x\in(E')'$，$\forall\delta>0$，有 $U_0(x,\frac{\delta}{2})\cap E'\neq\phi$. 而对于

$\forall x' \in E'$, $\forall \delta>0$, 有 $U_0(x', \frac{\delta}{2}) \cap E \neq \phi$. 于是对于 $x' \in U_0(x, \frac{\delta}{2}) \cap E'$,
取 $y \in U_0(x', \delta') \cap E$, 其中 $0<\delta' < |x-x'|$. 则由三角不等式知

$$|y-x| \leq |y-x'| + |x'-x| < 2|x-x'| < \delta.$$

故 $y \in U_0(x, \delta) \cap E$, 即 $U_0(x,\delta) \cap E \neq \phi$. 所以知 $x \in E'$.

4. 设 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一族集合, 证明:

(1) 当 Λ 为有限集时, 成立

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bar{A}_\lambda, \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^\circ.$$

(2) 对任意的指标集, 成立

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ \subseteq \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^\circ, \quad \overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bar{A}_\lambda.$$

证明. (1) $\bar{A}_\lambda$ 是闭集, Λ 有限, 故 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bar{A}_\lambda$ 也是闭集. 从而有

$$\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} \subset \overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bar{A}_\lambda} = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bar{A}_\lambda.$$

欲证第二式, 将 A_λ^c 代入第一式, 再对两边取补集, 则

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^\circ = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (\overline{A_\lambda^c})^c = \Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda^c}\Big)^c \subset \Big(\overline{\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c}\Big)^c$$

$$= \Big(\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c\Big)^c\Big)^\circ = \Big(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\Big)^\circ.$$

(2) 的证明类似. (细节留给读者).

注: (1) 的结论可加强为等号. (2) 有例子等号不成立.

5. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$，证明：

(1) E' 是闭集.　　　　(2) ∂E 是闭集.

证明. (1) 由题3的证明过程知 $(E')'\subset E'$，于是

$$E' = E'\cup(E')' = \overline{E'}$$

从而 E' 是闭集.

(2) 由 $E^\circ, (E^c)^\circ$ 是开集知 $E^\circ\cup(E^c)^\circ$ 是开集. 故

$$\partial E = (E^\circ\cup(E^c)^\circ)^c$$

是闭集.

注：由(2)可得一个结论：集合的边界的导集仍包含于集合的边界.

6. 设 $E_1, E_2\subset\mathbb{R}^n$ 为两个非空紧集，且满足 $d(E_1,E_2)=0$，其中 $d(E_1,E_2):=\inf\limits_{x\in E_1, y\in E_2}|x-y|$，则 $E_1\cap E_2\neq\phi$.

证明. 由 $d(E_1,E_2)=0$ 知存在 $\{x_k\}\subset E_1$，$\{y_k\}\subset E_2$，使得 $\{x_k-y_k\}$ 收敛于0. 由 E_1 有界知 $\{x_k\}$ 是有界序列，于是由Bolzano-Weierstrass定理知其存在收敛子列 $\{x_{k_j}\}$，记 $x_0=\lim\limits_{j\to\infty}x_{k_j}$. 再由 E_1 是闭集，得 $x_0\in E_1$. 因为 $\{x_{k_j}-y_{k_j}\}$ 收敛，故 $\{y_{k_j}\}$ 收敛. 于是有

$$\lim_{j\to\infty}y_{k_j} = \lim_{j\to\infty}(y_{k_j}-x_{k_j})+\lim_{j\to\infty}x_{k_j} = x_0.$$

又 E_2 是闭集，故 $x_0\in E_2$. 于是 $x_0\in E_1\cap E_2$，即 $E_1\cap E_2\neq\phi$.

注. 若 E_1, E_2 不紧，该结论不成立. 如 $E_1=(-1,0)$，$E_2=(0,1)$ 或 $E_1=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$，$E_2=\{(x,e^x): x\in\mathbb{R}\}$.

7. 设 $F\subset\mathbb{R}^n$ 是紧集，$E\subset\mathbb{R}^n$ 是开集，且 $F\subset E$. 求证：存在开集 O 使得 $F\subset O\subset\bar{O}\subset E$.

证明. 对 $\forall x\in F\subset E$，$\exists\,\delta_x>0$，s.t. $U(x,\delta_x)\subset E$. 显然

$$F\subset\bigcup_{x\in F}U\left(x,\frac{\delta_x}{2}\right)$$

即 $\bigcup_{x\in F}U(x,\frac{\delta_x}{2})$ 是 F 的一个开覆盖. 故存在一个有限子覆盖

$O=\bigcup_{i=1}^{n}U\left(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ 满足 $F\subset O\subset\bar{O}\subset E$.

8. 设 $A\subset\mathbb{R}^n$. 证明：$\bar{A}=\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,A)=0\}$.

证明. $\forall x\in\bar{A}$，若 $x\in A$，则显然有 $d(x,A)=\inf_{y\in A}|y-x|=0$.

若 $x\in A'$，则 $\exists\{x_n\}\subset A$，s.t. $x_n\to x$, $n\to\infty$，故 $d(x,A)=0$.

则知 $\bar{A}\subseteq\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,A)=0\}$.（反向包含留给读者）.

9. 若 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为凸集，则 $\bar{\Omega}$ 也是凸集. 举例说明反之不成立.

解. 欲证 $\bar{\Omega}$ 是凸集，只需证明 $\forall a,b\in\bar{\Omega}$，$ta+(1-t)b\in\bar{\Omega}$, $t\in[0,1]$.

由 $\bar{\Omega}$ 的定义知 $\exists\,x_n,y_n\in\Omega$，s.t. $x_n\to a$, $y_n\to b$. 由 Ω 的凸性知 $c_n:=tx_n+(1-t)y_n\in\Omega$. 故

$$ta+(1-t)b=\lim_{n\to\infty}c_n\in\bar{\Omega}.$$

举例：$\bar{\Omega}=\overline{B(0,1)}$，$\Omega=B(0,1)\setminus\{0\}$.

10. 证明：$\mathbb{R}^n$中每个闭集可表示为可列个开集的交.

证明. 设 F 是闭集. 令 $G_k=\{x\in\mathbb{R}^n: d(x,F)<\frac{1}{k}\}$, $k=1,2,\cdots$

易知 G_k, $k=1,2,\cdots$ 是开集(细节留给读者). 下证

$$F=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k.$$

对于 $\forall x\in\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$, 知 $\forall k\geq 1$, 有 $x\in G_k$. 于是

$$d(x,F)\leq\frac{1}{k},\quad k=1,2,\cdots.$$

则令 $k\to\infty$, 得 $d(x,F)=0$. 由题8知 $x\in\bar{F}=F$, 故

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\subset F.$$

又显然 $G_k\supset F$, $k=1,2,\cdots$, 故 $\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k\supset F$. 即得 $F=\bigcap_{k=1}^{\infty}G_k$.

注. 由此易知 $\mathbb{R}^n$中每个开集可表为可列个闭集的并.

11. 用闭集套定理证明三角形三边上的中线交于一点.

证明. 设 a,b,c 是 ΔABC 的三条中线. 取 ΔABC 三边的中点, 连接这些中点得到三角形 Δ_1. 重复此流程, 可得到边长趋于0的三角形列 $\{\Delta_n\}$. 由闭集套定理, 存在唯一的一点 p 属于所有的三角形 Δ_n. 设 a_n,b_n,c_n 是 Δ_n 的三条中线. 根据上述取法易见所有三角形 Δ_n 的中线实际上都重合于 ΔABC 的中线. 对于 $\forall\varepsilon>0$, 取直径小于 ε 的 Δ_n, 于是有中线 a 上的点 A 满足 $d(A,P)<\varepsilon$, 从而知 P 是 $\{a_n\}$ 的聚点. 由于 $\{a_n\}$

是闭集，故知 $P\in a$. 同理知 $P\in b$, $P\in c$, 故 ΔABC 的三条中线交于一点.

12. 设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，证明：$E=\{(x,f(x)):x\in\mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的闭集.

证明. $\forall (x,y)\in E'$, $\exists (x_n,f(x_n))\to(x,y)$, $n\to\infty$. 由 f 的连续性得

$$y=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=f(x),$$

故 $(x,y)\in E$, 即 $E'\subset E$, 所以 $E=\bar{E}$ 是闭集.

13. ($\mathbb{R}^n$ 的正规性) 设 S_1,S_2 为 $\mathbb{R}^n$ 中不相交的闭集. 证明：存在开集 O_1,O_2 满足 $S_i\subset O_i$, $i=1,2$ 且 $O_1\cap O_2=\phi$.

证明. 定义

$$O_1=\bigcup_{x\in S_1}U(x,\tfrac{d_x}{3}),\quad O_2=\bigcup_{y\in S_2}U(y,\tfrac{d_y}{3})$$

其中 $d_x=d(x,S_2)$, $d_y=d(y,S_1)$. 下证 O_1 和 O_2 都是开集.

设 $x\in O_1$, 若 $x\in S_1$, 则 $U(x,\frac{d_x}{3})\subset O_1$, 从而 x 是 O_1 的内点.

若 $x\notin S_1$ 但 $x\in U(y,\frac{d_y}{3})$, $y\in S_1$. 则

$$U(x,\tfrac{d_y}{3}-|x-y|)\subset U(y,\tfrac{d_y}{3})\subset O_1.$$

故 x 也是 O_1 的内点. 综上知 O_1 是开集. O_2 同理.

14. (1) 设 $S\subset\mathbb{R}^n$ 有界. 证明：$\forall\delta>0$, $\exists S$ 中有限个点 $P_1,\cdots,P_k$, s.t.

$$\bigcup_{i=1}^{k}U(P_i,\delta)\supset S.$$

(2) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式：若 $\{G_\alpha\}$ 是有界闭集 F 的开覆盖，则 $\exists\delta>0$, s.t. $\forall p\in F$, $\exists G\in\{G_\alpha\}$ 满足 $U(p,\delta)\subset G$.

(3) 证明覆盖定理的 Lebesgue 形式与通常形式等价.

证明. (1) 对于 $\forall\delta>0$, 由于 S 有界, 故可用棱长为 a 的正方体包含 S. 把这个正方体的棱长 M 等分, 切分成 M^n 个棱长为 $\frac{a}{M}$ 的小正方体. 取 M 足够大使得每个小正方体的对角线长小于 δ. 找出所有包含 S 中点的正方体, 再在每个正方体中取一个 S 中的点为中心, 以 δ 为半径作开球, 则该正方体含于该开球. 于是 S 被这些以 S 中的点为中心, 半径为 δ 的有限个开球所覆盖.

(2) $\forall p\in F$, 存在 $\{G_\alpha\}$ 中的开集 G_{α_p} s.t. $p\in G_{\alpha_p}$. 于是 $\exists\varepsilon_p>0$, s.t. $U(p,\varepsilon_p)\subset G_{\alpha_p}$. 考虑开球族 $\{U(p,\frac{\varepsilon_p}{2}): p\in F\}$. 易知它构成 F 的一个开覆盖. 由 F 是紧集知存在有限子覆盖

$$\{U(p_i,\tfrac{\varepsilon_{p_i}}{2}): i=1,2,\cdots,k\}.$$

令 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon_{p_i}}{2}; i=1,2,\cdots,k\}$. 于是 $\forall p\in F$, 知 $\exists p_i$ s.t. $p\in U(p_i,\frac{\varepsilon_{p_i}}{2})$, 则

$$U(p,\delta)\subset U(p,\tfrac{\varepsilon_{p_i}}{2})\subset U(p_i,\varepsilon_{p_i})\subset G_{\alpha_{p_i}}.$$

注: 此 δ 又称开覆盖 $\{G_\alpha\}$ 的 Lebesgue 数. 对于一般的紧度量空间有此结论:

$$\delta(\{G_\alpha\})=\min_{x\in F}\sup_{G\in\{G_\alpha\}} d(x,F\setminus G)>0.$$

(3) "$\Leftarrow$" 在(2)中已证. 下证"$\Rightarrow$".

若$\exists \delta>0$, $\forall p\in F$, $\exists G\in\{G_\alpha\}$, s.t. $U(p,\delta)\subset G$. 由于 F 有界, 于是由(1)知可用有限多个 $U(p_1,\delta),\cdots,U(p_m,\delta)$ 包含住 F. 从而存在有限多个 $G_1,G_2,\cdots,G_m$ 使得

$$F\subset\bigcup_{i=1}^{m}U(p_i,\delta)\subset\bigcup_{i=1}^{m}G_i.$$

15. 设 A,B 为 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集, 定义 $A+B=\{x+y: x\in A, y\in B\}$

(1) 如果 K 为 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集, C 为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集. 证明: $K+C$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集.

(2) 如果 K, C 只是 $\mathbb{R}^n$ 的闭子集, 则 $K+C$ 未必是闭子集.

证明. (1) 设 $x\in(K+C)'$, 则$\exists k_n\in K$, $c_n\in C$, s.t.

$$k_n+c_n\to x,\quad n\to\infty.$$

由于K是紧集, 故知存在子列$\{k_{n_j}\}\to k_0\in K$. 对应的$\{c_{n_j}\}$也存在极限, 且C为闭集, 故$\{c_{n_j}\}\to c_0\in C$. 则

$$x=\lim_{j\to\infty}(k_{n_j}+c_{n_j})=k_0+c_0\in K+C,$$

故 $(K+C)'\subset K+C$, 即 $K+C$ 是闭集.

(2) 考虑 $K=\mathbb{Z}$, $C=\{m\alpha: m\in\mathbb{Z}, \alpha$ 为无理数$\}$. 则有 $\overline{K+C}=\mathbb{R}$, 但 $K+C\neq\mathbb{R}$, 故 $K+C$ 不是闭集. 事实上, 我们知 C 在 $\mathbb{R}$ 中稠密, 故 $\forall x\in\mathbb{R}$, 有 $k\in K$, $c_n\in C$, s.t. $k+c_n\to x$. 故 $\overline{K+C}=\mathbb{R}$, 但 $K+C\subset\mathbb{Z}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\neq\mathbb{R}$.

16. 设 (X,d) 是度量空间，$Y\subset X$. 证明：Y 是紧的当且仅当 Y 是列紧的.

注：集合 Y 称作列紧的当且仅当 Y 中的每个序列都至少有一个收敛的子序列.

证明. "$\Leftarrow$" 反证. 假设对于 Y 的开覆盖 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 不存在有限子覆盖. 设 $y\in Y$，则 $\exists\,\alpha\in\Lambda$, s.t. $y\in V_\alpha$. 由于 V_α 是开集，所以 $\exists\, r>0$, s.t. $B(y,r)\subset V_\alpha$. 令

$$r(y):=\sup\{r\in(0,+\infty):\exists\,\alpha\in\Lambda,\ \text{s.t. } B(y,r)\subset V_\alpha\}.$$

则对 $\forall y\in Y$，$r(y)>0$. 现在令

$$r_0:=\inf_{y\in F} r(y).$$

于是有 $r_0\geq 0$. 下面分两种情形讨论.

第一种情形，$r_0=0$. 则由下确界定义知 $\forall n\in\mathbb{N}$，$\exists\, y_n\in Y$ s.t. $r(y_n)\leq\frac{1}{n}$. 于是便有

$$\lim_{n\to\infty} r(y_n)=0.$$

由于 Y 是列紧的，故知 $\{y_n\}$ 有收敛子序列 $\{y_{n_k}\}$. 记

$$y_0=\lim_{k\to\infty} y_{n_k}\in Y.$$

于是 $\exists\,\alpha\in\Lambda$, s.t. $y_0\in V_\alpha$. 从而 $\exists\,\varepsilon>0$, s.t. $B(y_0,\varepsilon)\subset V_\alpha$.

由于 $y_{n_k}\to y_0$, $k\to\infty$，故 $\exists\, N\geq 1$, s.t. $\forall j\geq N$ 有 $y_{n_j}\in B(y_0,\varepsilon)$.
于是由三角不等式知

$$B(y_{n_j}, \tfrac{\varepsilon}{2}) \subset B(y_1, \varepsilon) \subset V_\alpha$$

根据 $r(y_{n_j})$ 的定义知 $\forall j \geq N$，有 $r(y_{n_j}) \geq \frac{\varepsilon}{2}$，与 $\lim_{n\to\infty} r(y_n)=0$ 矛盾。

第二种情形，$r_0>0$。于是 $\forall y \in Y$，有 $r(y) > \frac{r_0}{2}$，这蕴含着对每个 $y \in Y$ 存在一个 $\alpha \in \Lambda$ 使得 $B(y, \frac{r_0}{2}) \subset V_\alpha$。下面我们构造一个没有收敛子序列的序列。

取 $y^{(1)} \in Y$ 是任意一点，则球 $B(y^{(1)}, \frac{r_0}{2})$ 含在某个 V_{α_1} 中，则由假设知不可能覆盖整个 Y。于是存在 $y^{(2)} \notin B(y^{(1)}, \frac{r_0}{2})$，且 $B(y^{(2)}, \frac{r_0}{2})$ 含于某个 V_{α_2} 中，同样的，$B(y^{(1)}, \frac{r_0}{2}) \cup B(y^{(2)}, \frac{r_0}{2})$ 不能覆盖 Y，且 $d(y^{(1)}, y^{(2)}) \geq \frac{r_0}{2}$。一直这样取下去可得到 Y 中的一个序列 $\{y^{(n)}\}$，其具有性质 $d(y^{(k)}, y^{(l)}) \geq \frac{r_0}{2}$，$\forall k \neq l$。于是便知 $\{y^{(n)}\}$ 的任何子序列都不是 Cauchy 序列，便与 Y 是列紧矛盾。故知 Y 是紧的。

"$\Rightarrow$" 反证。假设 Y 不是列紧的，于是便知存在一个序列没有收敛子序列。不失一般性，我们假设 $\{x^{(n)}\}$ 没有极限点。于是便知对于 $\forall x \in Y$，存在一个球 $B(x, \varepsilon_x)$，它最多含有此序列的有限多个元素。显然 $\{B(x, \varepsilon_x)\}$ 构成 Y 的一个开覆盖，故而 $\exists\, x_1, \cdots, x_k$，s.t. $Y \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \varepsilon_{x_i})$。但由于 $B(x_i, \varepsilon_{x_i})$

中只包含有限多个$\{x^{(n)}\}$的元素，故$\bigcup_{i=1}^{k} B(x_i,\varepsilon_{x_i})$中也只包含有限多个元素，即$Y$中只包含$\{x^{(n)}\}$的有限多个元素，故而与$\{x^{(n)}\}$没有极限点矛盾。

练习 1. 度量空间(X,d)称作完全有界的，如果$\forall \varepsilon>0$，$\exists n\in\mathbb{N}$，以及$B(x^{(1)},\varepsilon),\cdots,B(x^{(n)},\varepsilon)$ s.t. $X\subset\bigcup_{i=1}^{n} B(x^{(i)},\varepsilon)$。
证明：(X,d)是紧致的当且仅当(X,d)是完备的并且是完全有界的。

2. 设(X,d)是紧致度量空间，假设闭子集族$\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$具有有限交性质，即是对于任意有限集$F\subset\Lambda$，都有$\bigcap_{\alpha\in F} K_\alpha\neq\phi$。
证明：$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} K_\alpha\neq\phi$。并举例说明如果$X$不紧则结论不成立。