# 数分Ⅲ习题课 (11.2)

1. 设函数 $f(x,y,z)=x^2-xy+y^2+z^2$，求它在 $(1,1,1)$ 处的沿各个方向的方向导数，并求出方向导数的最值以及方向导数为 0 的所有方向.

解. 设单位向量 $v=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cos\theta_3)$，则

$$\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial v}=\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial x}\cos\theta_1+\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial y}\cos\theta_2+\frac{\partial f(1,1,1)}{\partial z}\cos\theta_3$$

$$=(2x-1)\Big|_{x=1}\cos\theta_1+(2y-1)\Big|_{y=1}\cos\theta_2+2z\Big|_{z=1}\cos\theta_3$$

$$=\cos\theta_1+\cos\theta_2+2\cos\theta_3.$$

故由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|\cos\theta_1+\cos\theta_2+2\cos\theta_3|\le\sqrt{6}.$$

则知最值为 $\sqrt{6}$，$-\sqrt{6}$.

记 $\cos\theta_3=t$，则

$$\begin{cases}\cos\theta_1^2+\cos\theta_2^2+t^2=1\\ \cos\theta_1+\cos\theta_2+2t=0\end{cases},$$

解得

$$v\in\left\{\left(\pm\sqrt{\frac{1-3t^2}{2}},\ \mp\sqrt{\frac{1-3t^2}{2}}-t,\ t\right):|t|\le\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

注. 事实上，由梯度的意义，知 $\max\left\{\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}\right\}=\frac{\partial f(x_0)}{\partial\left(\frac{\operatorname{grad}f(x_0)}{|\operatorname{grad}f(x_0)|}\right)}=|\operatorname{grad}f(x_0)|$.

$$\min\left\{\frac{\partial f(x_0)}{\partial v}\right\}=\frac{\partial f(x_0)}{\partial\left(-\frac{\operatorname{grad}f(x_0)}{|\operatorname{grad}f(x_0)|}\right)}=-|\operatorname{grad}f(x_0)|.$$

2. 设 $x\in\mathbb{R}^n\ (n\geq 2)$，试求下列向量函数的导数.

(1) $f(x)=x|x|$.　　(2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$，$x\neq 0$.　　(3) $f(x)=(Ax)\cdot(Ax)$.

解. (1) 按分量求偏数如

$$\frac{\partial(x_i|x|)}{\partial x_j}=\delta_{ij}|x|+x_i\frac{x_j}{|x|}.$$

则

$$f'(x)=\begin{pmatrix} |x|+\frac{x_1^2}{|x|} & \frac{x_1x_2}{|x|} & \cdots & \frac{x_1x_n}{|x|} \\ \frac{x_2x_1}{|x|} & |x|+\frac{x_2^2}{|x|} & \cdots & \frac{x_2x_n}{|x|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{x_nx_1}{|x|} & \frac{x_nx_2}{|x|} & \cdots & |x|+\frac{x_n^2}{|x|} \end{pmatrix}$$

(2) 按分量求偏导数得

$$\frac{\partial\left(\frac{x_i}{|x|}\right)}{\partial x_j}=\frac{\delta_{ij}}{|x|}-\frac{1}{|x|^2}\cdot\frac{x_ix_j}{|x|}$$

则

$$f'(x)=\begin{pmatrix} \frac{1}{|x|}-\frac{x_1^2}{|x|^3} & -\frac{x_1x_2}{|x|^3} & \cdots & -\frac{x_1x_n}{|x|^3} \\ -\frac{x_2x_1}{|x|^3} & \frac{1}{|x|}-\frac{x_2^2}{|x|^3} & \cdots & -\frac{x_2x_n}{|x|^3} \\ \vdots & & \ddots & \\ -\frac{x_nx_1}{|x|^3} & -\frac{x_nx_2}{|x|^3} & \cdots & \frac{1}{|x|}-\frac{x_n^2}{|x|^3} \end{pmatrix}$$

(3) 设 $A^TA=(a_{ij})_{n\times n}$，则如

$$f(x)=x^TA^TAx=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

易得　　$f'(x)=2A^TAx$.

3. 求下列复合函数的偏导数

(1) $z = f(xe^y, xe^{-y})$　　　　(2) $u = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \prod_{i=1}^{n} x_i^2, x_3, \cdots, x_n\right)$.

解. (1) 利用链式法则.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y f_1' + e^{-y} f_2' \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^y f_1' - xe^{-y} f_2'.$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 f_1' + 2\prod_{i=1}^{n} x_i f_2'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 2x_2 f_1' + 2\prod_{i=1}^{n} x_i f_2'.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = 2x_k f_1' + 2\prod_{i=1}^{n} x_i f_2' + f_k' \quad , \quad k=3,4,\cdots,n.$$

4. 设函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数在区域 $D$ 满足 $f_x' = f_y' = 0$. 证明:

$f(x,y) = C$, $\forall x,y \in D$, 其中 $C$ 是常数.

证明. 由 $D$ 是区域知 $D$ 上任意两点都存在道路, 故可用以道路上的点为心的邻域覆盖, 从而有有限覆盖, 进而存在以其为端点的折线段, 每条折线段平行于某条坐标轴. 从而反复使用拉格朗日定理知 $D$ 上任意两点的函数值相等.

5. 验证函数 $k(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^{n-2}} & , n \geq 3 \\ -\ln|x| & , n=2 \end{cases}$ 满足 Laplace 方程

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

注. 一般将 $k(x,x_0) = k(x-x_0)$ 称为 Laplace 方程的基本解.

证明. 只验证 $n\geq 3$ 的情形. $n=2$ 留给读者

求偏导数得

$$\frac{\partial K}{\partial x_i} = -(n-2)\,|x|^{1-n}\,\frac{x_i}{|x|} = -(n-2)\,|x|^{-n}\,x_i$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_i \partial x_j} = n(n-2)\,|x|^{-(n+2)}\,x_i x_j - (n-2)\,|x|^{-n}\,\delta_{ij}$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 K}{\partial x_i^2} = n(n-2)\,|x|^{-(n+2)} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (n-2)\,|x|^{-n} \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$= n(n-2)\,|x|^{-n} - n(n-2)\,|x|^{-n}$$

$$= 0.$$

5. 设 $f(x)$ 是一个二次可微函数，证明

$$F(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-at) + f(x+at)\right]$$

满足方程

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

证明. 直接求偏导数得

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{(-a)^2 f''(x-at)}{2} + \frac{a^2 f''(x+at)}{2} = a^2 \frac{1}{2}\left[f''(x-at) + f''(x+at)\right]$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}.$$

注. 可以证明 $F(x,t)$ 是波方程的通解.

7. 设 $u(x,y)$ 有二阶偏导数，无零点，证明：$u$ 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

当且仅当 $u(x,y) = f(x)g(y)$.

证明. 充分性显然. 下证必要性. 由于 $u(x,y)$ 无零点，故可不妨设 $u>0$.

令 $v = \ln u$. 于是得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

则有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} = \frac{1}{u^2}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + u\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right) = 0.$$

故得 $\exists\ F(x),\ G(y)$ s.t.

$$v(x,y) = F(x) + G(y).$$

则

$$u(x,y) = e^{v(x,y)} = e^{F(x)}\cdot e^{G(y)}.$$

记 $f(x) = e^{F(x)}$，$g(y) = e^{G(y)}$ 即证.

8. 设 $f$ 有连续偏导数，则 $f$ 是 $k$ 次齐次函数的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = kf(x).$$

证明. 必要性. 对 $f(tx) = t^k f(x)$ 两边关于 $t$ 求导再令 $t=1$ 便得.

下证充分性.

充分性. 令

$$F(t)=\frac{f(tx)}{t^k},\quad t>0.$$

则对 $t$ 求导得

$$F'(t)=-kt^{-k-1}f(tx)+t^{-k}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$$

$$=t^{-k}\left(-kf(tx)+\sum_{i=1}^{n}tx_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\right)$$

$$=0$$

故 $F(t)$ 为常值, 又 $F(1)=f(x)$, 所以有 $F(t)=f(x), \forall t>0$, 即有

$$f(tx)=t^k f(x),\quad t>0.$$

2. 设 $f(x,y)$ 满足: $f_x$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上存在, $f_y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 且

$$|f_x|<M|f_y|,\quad f(x_0,y_0)=0.$$

证明: $f(x,y)=0$ 唯一确定一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的可微函数 $y=y(x)$, $y(x_0)=y_0$.

证明. 由 $|f_x|<M|f_y|$ 以及 $f_y$ 的连续性知 $f_y$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上恒正或恒负, 故可不妨设 $f_y>0$. 则由隐函数存在定理知 $\exists\, U(x_0)$ 上的隐函数 $y=y(x)$ 满足 $f(x,y(x))=0$. 同时由

$$0=f(x,y(x))-f(x_0,y(x_0))$$

$$=f(x,y(x))-f(x,y(x_0))+f(x,y(x_0))-f(x_0,y(x_0))$$

$$=f_y(x,\theta)(y(x)-y(x_0))+f_x(x_0,y(x_0))(x-x_0)+o(x-x_0).$$

故得

$$\frac{y(x)-y(x_0)}{x-x_0}=-\frac{f_x(x_0,y(x_0))}{f_y(x,\vartheta)}+o(1)\to-\frac{f_x}{f_y}\Big|_{(x,y)=(x_0,y(x_0))},\quad x\to x_0$$

所以知 $y(x)$ 在 $x_0$ 处可微. 事实上, 此处的 $(x_0,y(x_0))$ 是任意的, 故知 $y(x)$ 在 $U(x_0)$ 上都可微. 下证 $y(x)$ 可被延拓到 $\mathbb{R}$ 上. 假设存在 $\beta>x_0$ 使得 $y(x)$ 只能定义在 $[x_0,\beta)$ 上. 则由

$$|y'(x)|=\left|\frac{f_x}{f_y}\right|<M$$

知 $y(x)$ 在 $[x_0,\beta)$ 上一致连续, 故 $y(\beta-0)$ 存在, 故可通过补充定义 $y(\beta)=y(\beta-0)$ 将 $y(x)$ 延拓至 $[x_0,\beta]$ 上, 与假设矛盾. 因此 $y(x)$ 可从 $x_0$ 一直往右延拓, 类似地 $y(x)$ 也可以从 $x_0$ 往左延拓, 从而知 $y(x)$ 可被延拓至 $\mathbb{R}$ 上.

**10**. 证明方程 $x^2-2xy+z+xe^z=0$ 在点 $(1,1,0)$ 的某个邻域内唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$, 并求 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的泰勒公式 (二次).

**证明**. 设 $F(x,y,z)=x^2-2xy+z+xe^z$, 则 $F(1,1,0)=0$, 且

$$F_z'(x,y,z)\Big|_{(x,y,z)=(1,1,0)}=1+xe^z\Big|_{(x,y,z)=(1,1,0)}=2\neq0.$$

故由隐函数存在定理知 $F(x,y,z)=0$ 在 $(1,1,0)$ 的某个邻域唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$.

设 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的泰勒公式为

$$f(x,y)=a_1(x-1)+a_2(y-1)+b_{11}(x-1)^2+b_{12}(x-1)(y-1)+b_{22}(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2)$$

则知

$$F(x,y,f(x,y)) = x^2-2xy+f(x,y)+xe^{f(x,y)}$$

$$= x^2-2xy+f(x,y)+(x-1+1)\left(1+f(x,y)+\frac{f^2(x,y)}{2}+o(f^2(x,y))\right)$$

$$= (x-1)^2-2(x-1)(y-1)-2(y-1)-1+f(x,y)+(x-1)\left(1+a_1(x-1)+a_2(y-1)\right)$$

$$+\left(1+f(x,y)+\frac{(a_1(x-1)+a_2(y-1))^2}{2}\right)+o((x-1)^2+(y-1)^2)$$

$$= (2a_1+1)(x-1)+(2a_2-2)(y-1)+\left(\frac{a_1^2}{2}+a_1+2b_{11}+1\right)(x-1)^2$$

$$+(a_1a_2+a_2+2b_{12}-2)(x-1)(y-1)+\left(\frac{a_2^2}{2}+2b_{22}\right)(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2)$$

由 $F(x,y,f(x,y))=0$ 在 $(1,1)$ 的某个邻域内成立，知

$$a_1=-\frac{1}{2},\quad a_2=1,\quad b_{11}=-\frac{5}{16},\quad b_{12}=\frac{3}{4},\quad b_{22}=-\frac{1}{4}.$$

故 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处的泰勒展开为

$$f(x,y)=-\frac{1}{2}(x-1)+(y-1)-\frac{5}{16}(x-1)^2+\frac{3}{4}(x-1)(y-1)-\frac{1}{4}(y-1)^2+o((x-1)^2+(y-1)^2).$$

**11.** 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是 $C^1$ 映射，且存在 $\alpha>0$，s.t. $\forall x\in\mathbb{R}^n$ 有

$$u^T Jf(x)\,u \geq \alpha|u|^2,\quad \forall u\in\mathbb{R}^n.$$

证明：

$$|f(x)-f(y)|\geq \alpha|x-y|^2,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

且 $f$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 $C^1$-微分同胚.

证明. 由于 $\mathbb{R}^n$ 是凸集，故由 Lagrange 微分中值定理知 $\exists\, z=x+\theta(y-x)$, s.t.

$$f(x)-f(y) = Jf(z)\cdot(x-y)$$

于是

$$(x-y)^T(f(x)-f(y)) = (x-y)^T\cdot Jf(z)\cdot(x-y) \geq \alpha|x-y|^2.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|y-x||f(x)-f(y)| \geq (x-y)^T\cdot(f(x)-f(y)) \geq \alpha|x-y|^2$$

因此，我们有

$$|f(x)-f(y)| \geq \alpha|x-y|.$$

注意到

$$\det Jf(z) \geq \alpha^n > 0,$$

故由局部逆映射定理知 $f^{-1}$ 是 $C^1$ 映射，即 $f$ 是局部 $C^1$ 微分同胚，欲证 $f$ 是整体 $C^1$-微分同胚，只需再证明 $f$ 是满射.

即证 $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$. 由于 $f$ 是局部 $C^1$-微分同胚，故知 $f$ 是开映射，故 $f(\mathbb{R}^n)$ 是开集，下证 $f(\mathbb{R}^n)$ 是闭集.

任取 $y\in\overline{f(\mathbb{R}^n)}$，知 $\exists\,\{x_k\}\subset\mathbb{R}^n$，s.t. $f(x_k)\to y$. 故 $\{f(x_k)\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列. 又注意到

$$|x_k-x_l| \leq \frac{1}{\alpha}|f(x_k)-f(x_l)| \to 0,\quad k,l\to\infty.$$

所以 $\{x_k\}$ 也是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 列，则由 $\mathbb{R}^n$ 的完备性得 $\exists x\in\mathbb{R}^n$ s.t. $x=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$，从而有 $y=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_k)=f(x)\in f(\mathbb{R}^n)$.

即得 $f(\mathbb{R}^n)$ 是闭集，又 $\mathbb{R}^n$ 是连通的，所以有 $f(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$.

## 练习

1. 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 $C^1$ 映射. 若只存在有限多个点 $x_1, \cdots, x_r$, 使得 $\det Jf(x_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, r$, 并且对每个正数 $M$, $\{z \in \mathbb{R}^n : |f(z)| \le M\}$ 有界. 证明: $f$ 把 $\mathbb{R}^2$ 映满.

2. 设 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为 $C^1$ 映射, 且 $Jf(x_0)$ 可逆. 证明: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 只要 $|x|$ 充分小, 就存在 $z \in \mathbb{R}^n$, $z = o(|x|)$, $|x| \to 0$, s.t.

$$f(x_0 + x + z) - f(x_0) - Jf(x_0)x = 0.$$

3. 熟练掌握隐函数存在定理及反函数存在定理的证明.