数分III习题课（11.16）

1. 证明不存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ $(m<n)$ 的 C^1 同胚映射

证明. 反设存在 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的 C^1 同胚映射 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. 记其逆映射为 $f^{-1}:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. 于是有 $f^{-1}\circ f=id_{\mathbb{R}^n}$. 由于 f 和 f^{-1} 都是 C^1 的，故而由链式法则得

$$Jf^{-1}\cdot Jf(x) = I_n .$$

但是由于 Jf^{-1} 是 $n\times m$ 阶矩阵，Jf 是 $m\times n$ 阶矩阵，故而有

$$\operatorname{rank}(Jf^{-1}\cdot Jf)\le m<n ,$$

于是有 $Jf^{-1}\cdot Jf$ 不可能为恒等矩阵，矛盾.

注. 此题若让证明 $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^m$ 不同胚则会困难很多.

2. 设函数 $u=u(x,y)$ 在单位圆盘 $\Delta=\{(x,y): x^2+y^2<1\}$ 的闭包上具有连续的二阶偏导数，在 Δ 内满足 $u(x,y)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，并且在 $\partial\Delta$ 上有 $u=0$. 证明：在 $\overline{\Delta}$ 上，$u(x,y)\equiv 0$.

证明. 我们证明 $\max\limits_{\overline{\Delta}} u(x,y)=\min\limits_{\overline{\Delta}} u(x,y)=0$. 采用反证，不妨假设 $\min\limits_{\overline{\Delta}} u(x,y)<0$，于是有 $\exists\,(x_0,y_0)\in\Delta$, s.t. $u(x_0,y_0)=\min\limits_{\overline{\Delta}} u(x,y)<0$. 由极小值的必要条件有

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}\ge 0 .$$

但我们有

$$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}=u(x_0,y_0)<0,$$

矛盾. 故知 $u(x,y)\equiv 0$.

注. 一般地, 我们可以证明上述方程的非负最大值和非正最小值一定在边界达到.

3. 设可微函数 $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ 满足 $F(x,y,z)=0$, 其中 $F(x,y,z)$ 是 C^1 函数. 证明:

证明. 由 $F(x,y,z)=0$ 得

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0$$

又由于在 (x,y,z) 处 ∇F 与由参数方程得到的法向量平行, 且法向量为

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$$

故得结论.

4. 设曲面 S 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出, 其中 $F(x,y,z)$ 是区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 内的 C^1 函数, 并且在 $(x_0,y_0,z_0)\in D$ 处满足 $F'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$. 证明该曲面 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面上过点 (x_0,y_0,z_0) 的任一条直线都是曲面上过该点的某些条曲线的切线.

证明. 由 $F'(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ 知 $F(x,y,z)=0$ 在 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为

$$F'_x(x-x_0)+F'_y(y-y_0)+F'_z(z-z_0)=0.$$

考虑过 (x_0,y_0,z_0) 且 S 该切平面垂直的任一平面 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

则在该切平面上过(x_0,y_0,z_0)的直线方程为

$$\begin{cases} F_x'(x-x_0)+F_y'(y-y_0)+F_z'(z-z_0)=0 \\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \end{cases}$$

于是易知它是曲线

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \end{cases}$$

在该点的切线.

5. 设$\Omega\subset\mathbb{R}^2$是可求面积的有界闭区域,函数$z=h(x,y)$在$\Omega$上连续且$h(x,y)\geq 0$. 证明: $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq z\leq h(x,y)\}$可求体积.

证明. 由Ω可求面积,知对$\forall\varepsilon>0$,存在长方形族$\mathcal{A}_\Omega=\{A_k\}_{k=1}^{k_1+k_2}$,其中$A_k\subset\Omega$, $k=1,2,\cdots,k_1$, $A_k\not\subset\Omega$,但$A_k\cap\Omega\neq\phi$, $k=k_1+1,\cdots,k_1+k_2$ 使得

$$\alpha(\{A_k\}_{k=k_1+1}^{k_1+k_2})<\varepsilon.$$

考虑长方体族$\mathcal{B}_D=\{B_k\}_{k=1}^{k_1+k_2}\cup\{C_k\}_{k=1}^{k_1}$,并任取$\delta>0$,其中

$$B_k=\begin{cases}\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in A_k,\ \min\limits_{(x,y)\in A_k}h(x,y)\leq z\leq\max\limits_{(x,y)\in A_k}h(x,y)\}, & k=1,2,\cdots,k_1. \\ \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in A_k,\ -\delta\leq z\leq\max\limits_{(x,y)\in A_k\cap\Omega}h(x,y)\}, & k=k_1+1,\cdots,k_1+k_2.\end{cases}$$

$$C_k=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ (x,y)\in A_k,\ -\delta\leq z\leq 0\},\quad k=1,2,\cdots,k_1.$$

并记$w_k=\max\limits_{(x,y)\in A_k}h(x,y)-\min\limits_{(x,y)\in A_k}h(x,y)$, $k=1,2,\cdots,k_1$, $M=\max\limits_{(x,y)\in\Omega}h(x,y)$. 则有

$$M(\mathcal{B}_D)=V(\mathcal{B}_D)\leq\sum_{k=1}^{k_1}(w_k+\delta)\,\alpha(A_k)+\sum_{k=k_1+1}^{k_1+k_2}(M+\delta)\,\alpha(A_k)$$
$$<(\max_{1\leq k\leq k_1}\{w_k\}+\delta)\,\alpha(\Omega)+(M+\delta)\,\varepsilon.$$

由 $z=h(x,y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的一致连续性(因为 Ω 是有界闭区域)，知 充分细分

分 Ω 后有 $\max\limits_{1\le k\le k_1}\{W_k\}$ 趋向于 0，而 ε 和 δ 是任意的. 于是便知

$$V(\partial D) < V(\mathcal{B}_D) \to 0$$

故得 D 是可求体积的

6. 设 $E=\{(x,y): x,y\in Q\}$. $D=[0,1]\times[0,1]$，证明: $D\cap E$ 不可求面积.

证明. 由 $\alpha(\partial(D\cap E)) = \alpha(D) = 1 \ne 0$ 知 $D\cap E$ 不可求面积.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ 与平面 $x+y-z=0$ 的交线为一椭圆，求该椭圆在该平面内所围区域的面积.

2. 设 $D\subset\mathbb{R}^n$ 是可求体积的有界闭区域，若 $f(x)$ 在 D 上可积，则 $f(x)$ 在 D 上有界.

3. 设曲线 l: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $\alpha\le t\le\beta$，其中 φ,ψ 连续且至少有一个有连续导数. 证明 $\alpha(l)=0$.