数分Ⅲ习题课 (11.30)

1. 设 $E=\{(x,y): x,y\in\mathbb{Q}\}$. $D=[0,1]\times[0,1]$, 证明: $D\cap E$ 不可求面积.

证明. 由 $\alpha(\partial(D\cap E))=\alpha(D)=1\neq 0$ 知 $D\cap E$ 不可求面积.

2. 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 是可求面积的有界区域, 函数 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上有界且在 D 内连续. 证明: $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上可积.

证明. 由 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上有界知 $\exists M>0$, s.t. $|f(x,y)|\le M$, $\forall (x,y)\in\bar{D}$. 由 D 可求面积知 $\alpha(\partial D)=0$. 于是对于 $\forall\varepsilon>0$, 存在简单集合 $E=\{\Delta E_1,\cdots,\Delta E_{k_1}\}$ 使得 $\partial D\subset E^\circ$ 且 $\alpha(E^\circ)\le\frac{\varepsilon}{4M}$. 从而存在 $D\cap E^\circ$ 的分割 $\{\Delta D_1,\cdots,\Delta D_{k_1}\}$ 使得

$$\sum_{k=1}^{k_1}\omega_k\Delta\sigma_k\le 2M\sum_{k=1}^{k_1}\Delta\sigma_k\le 2M\alpha(E^\circ)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $\bar{D}\setminus E^\circ$ 的紧性以及 $f(x,y)$ 的连续性知 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}\setminus E^\circ$ 上是一致连续的, 故存在 $\bar{D}\setminus E^\circ$ 的分割 $\{\Delta D_{k_1+1},\cdots,\Delta D_{k_1+k_2}\}$ 使得

$$\sum_{k=k_1+1}^{k_1+k_2}\omega_k\Delta\sigma_k<\frac{\varepsilon}{2}.$$

从而 $\bar{D}$ 的分割 $\{\Delta D_1,\cdots,\Delta D_{k_1+k_2}\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{k_1+k_2}\omega_k\Delta\sigma_k<\varepsilon,$$

其中 ω_k 为 $f(x,y)$ 在 ΔD_k 上的振幅, $\Delta\sigma_k$ 为 ΔD_k 的面积, 故得到 $f(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上可积.

注. 用类似的办法可以证明 除去一个零体积集的连续函数在有界区域上是可积的.

3. 设 $f(x)$ 是 $U(x_0,\delta_0)\subset\mathbb{R}^n$ $(\delta_0>0)$ 内连续，并记 V_δ 为 $U(x_0,\delta)$ 的体积。

证明：

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{V_\delta}\int_{U(x_0,\delta)} f(x)\,dV = f(x_0).$$

证明. 由重积分第一中值定理知 $\exists\,\xi\in U(x_0,\delta)$, s.t.

$$\frac{1}{V_\delta}\int_{U(x_0,\delta)} f(x)\,dV = \frac{f(\xi)}{V_\delta}\int_{U(x_0,\delta)} 1\,dV = f(\xi).$$

于是由 $f(x)$ 的连续性知 $\lim\limits_{\delta\to 0} f(\xi) = f(x_0)$，即得

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{V_\delta}\int_{U(x_0,\delta)} f(x)\,dV = f(x_0).$$

4. 求由曲面 $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{z^2}{2}=1$ 与三个坐标平面所围立体在第一卦限部分的体积。

解. 作变量替换

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}\,rs\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\,r(1-s)\cos\theta \\ z = \sqrt{2}\,r\sin\theta \end{cases},\quad r\in[0,1],\ s\in[0,1],\ \theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}].$$

则 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,s,\theta)} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}s\cos\theta & \sqrt{2}r\cos\theta & -\sqrt{2}rs\sin\theta \\ \sqrt{3}s\cos\theta & \sqrt{3}r\cos\theta & -\sqrt{3}rs\sin\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta & 0 & \sqrt{2}r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 2\sqrt{3}\,r^2\sin\theta.$$

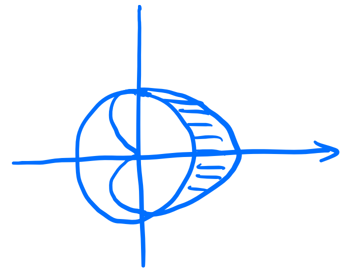
于是

$$V=\int_D 1\,dV = 2\sqrt{3}\int_S r^2\sin\theta\,dr\,ds\,d\theta = 2\sqrt{3}\int_0^1\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\sin\theta\,d\theta\,dr\,ds = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

5. 计算下列二重积分：

(1) $\iint_D y\,dxdy$，其中 D 是由心脏线 $r=2(1+\cos\theta)$ 所围且落在 $r=2$ 外部的有界区域.

解. 作变量替换 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$. 故



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=r$$

于是有

$$\iint_D y\,dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_2^{2(1+\cos\theta)} r\sin\theta\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}(3+3\cos\theta+\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=0.$$

另解. 利用对称性可知积分为 0.

(2) $\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy$，其中 D 是由 $x^2-y^2=1$，$x^2-y^2=9$，$xy=2$，$xy=4$ 所围的有界区域.

解. 作变量替换 $\begin{cases} u=x^2-y^2 \\ v=xy \end{cases}$，则 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}=2(x^2+y^2)$.

于是

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy=\iint_\Omega \frac{1}{2}\,du\,dv=\int_1^9\int_2^4\frac{1}{2}\,du\,dv=8.$$

6. 求由曲线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围有界闭区域的面积.

解. 令 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$，则 $r^2=a^2\cos2\theta$. 故 $S=\iint_D r\,dr\,d\theta=a^2$.

I. 证明 Poincaré 不等式：设 $C_0^m(\Omega)$ 表示有界区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上一切 m 次连续可微并在边界 $\partial\Omega$ 的某邻域内为 0 的函数集合，即

$$C_0^m(\Omega):=\{u\in C^m(\bar{\Omega})\mid u(x)=0,\ 当\ x\ 属于\ \partial\Omega\ 的某邻域时\}.$$

那么 $\forall u\in C_0^m(\Omega)$ 有

$$\sum_{|\alpha|<m}\int_\Omega |D^\alpha u|^2dx\le C\sum_{|\alpha|=m}\int_\Omega |D^\alpha u|^2dx$$

其中 C 是仅依赖于 Ω，m 及 n 的常数.

证明. 因为 Ω 是有界的，我们可以把 Ω 放在某个边长为 a 的立方体 Ω_1 中，适当选择坐标系，使得

$$\Omega_1=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid 0\le x_i\le a,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

在 $\Omega_1\backslash\Omega$ 上补充定义 $u=0$ 后，知 $u(x)$ 在 Ω_1 上 m 次连续可微，而且在边界上等于 0. 对于 $\forall x\in\Omega_1$，有

$$u(x)=\int_0^{x_1}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x_2,\cdots,x_n)\,dt.$$

再由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$|u(x)|^2\le a\int_0^a\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2dx_1.$$

于是在 Ω_1 上积分得

$$\int_\Omega |u(x)|^2dx\le a^2\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2dx$$
$$\le a^2\int_\Omega |Du|^2dx.$$

然后逐次应用上述不等式于 $D^\alpha u$，$|\alpha|<m$，即得结论.

8. 设连续函数 $f(x,y)$ 的等位线是简单封闭曲线，$S(v_1,v_2)$ 是由曲线 $f(x,y)=v_1$，$f(x,y)=v_2$ 所围的区域. 证明 Catalan 公式：

$$\iint_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dxdy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v)\,dv,$$

其中 $F(v)$ 为由曲线 $f(x,y)=v_1$，$f(x,y)=v_2$ 所包围的面积，还假设 $F(v)$ 可微且导函数 $F'(v)$ 可积.

证明. 作 $[v_1,v_2]$ 的任一分划

$$T:\ v_1=v_0'<v_1'<\cdots<v_n'=v_2,$$

令 $d(T)=\max\limits_{1\le i\le n}\Delta v_i'$，其中 $\Delta v_i'=v_i'-v_{i-1}'$. 于是由积分中值定理知

$$\iint_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n}\iint_{S(v_{i-1}',v_i')} f(x,y)\,dxdy$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\,\Delta S_i,$$

其中 $(\bar{x}_i,\bar{y}_i)\in S(v_{i-1}',v_i')$，$\Delta S_i$ 为区域 $S(v_{i-1}',v_i')$ 的面积. 令 $v_i^*=f(\bar{x}_i,\bar{y}_i)$ 则知 $v_{i-1}'\le v_i^*\le v_i'$. 又由微分中值定理知

$$\Delta S_i = F(v_i')-F(v_{i-1}') = F'(\bar{v}_i)\,\Delta v_i', \quad v_{i-1}'\le \bar{v}_i\le v_i'.$$

于是由 $F'(v)$ 可积知 $\exists\, M>0$, s.t. $|F'(v)|\le M$, $v_1\le v\le v_2$. 则知

$$\iint_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} v_i^* F'(\bar{v}_i)\,\Delta v_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \bar{v}_i F'(\bar{v}_i)\,\Delta v_i' + \sum_{i=1}^{n}(v_i^*-\bar{v}_i)F'(\bar{v}_i)\,\Delta v_i'.$$

由 $F(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上可积知 $vF(v)$ 也可积，于是

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\bar{v}_i F(\bar{v}_i)\Delta v_i' = \int_{v_1}^{v_2} vF(v)\,dv.$$

另一方面，注意到

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\bar{v}_i^* - \bar{v}_i)F(\bar{v}_i)\Delta v_i'\right| \le M(v_2-v_1)\,d(T) \to 0.$$

从而得

$$\iint_{S(v_1,v_2)} f(x,y)\,dxdy = \int_{v_1}^{v_2} vF(v)\,dv.$$

$\boxed{\text{练习}}$

1. 证明 Hölder 不等式：$\forall p, q \ge 1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，有

$$\int_\Omega |uv|\,dx \le \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2. 证明 Minkowski 不等式：$\forall p \ge 1$，有

$$\left(\int_\Omega |u+v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_\Omega |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是有界区域，$u(x) \in C(\bar{\Omega})$ 且 $u(x) > 0$. 定义

$$\Phi_p(u) = \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $|\Omega|$ 是 Ω 的体积，证明：

(1) $\lim\limits_{p\to+\infty}\Phi_p(u) = \max\limits_{x\in\bar{\Omega}} u(x)$.　　(2) $\lim\limits_{p\to-\infty}\Phi_p(u) = \min\limits_{x\in\bar{\Omega}} u(x)$.

(3) $\lim\limits_{p\to 0}\Phi_p(u) = e^{\frac{1}{|\Omega|}\int \ln u\,dx}$.

4. 证明 Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式：设 $1\le p<n$，则存在只与 p,n 有关的常数 C，使得 $\forall u\in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $\frac{1}{p^*}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$，即 $p^*=\frac{np}{n-p}$，称为 p 的 Sobolev 共轭.

(提示：类似于 Poincaré 不等式的证明，利用 Hölder 不等式.)

5. (难) 证明 Morrey 不等式：设 $n<p\le\infty$，则存在只与 n 和 p 有关的常数 $C>0$，使得 $\forall u\in C^1(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}\le C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)},$$

其中 $\alpha=1-\frac{n}{p}$，$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p dx+\int_{\mathbb{R}^n}|Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$.

注. 上述两个不等式是 Sobolev 嵌入的基础，也是现代 PDE，特别是椭圆 PDE 不可或缺的工具. 感兴趣的同学可参见 Evans 或者 Gilbarg-Trudinger 的书籍.