数分Ⅲ习题课（12.14）

1.（16.3）设曲线Γ为球面$x^2+y^2+z^2=1$与平面$x+y+z=0$的交线，求下列第一型曲线积分：

(1) $\int_\Gamma x\,ds$ (2) $\int_\Gamma xy\,ds$ (3) $\int_\Gamma x^2ds$.

解 利用Γ的参数方程

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt6}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t \\ y=\frac{1}{\sqrt6}\cos t+\frac{1}{\sqrt2}\sin t \\ z=-\frac{2}{\sqrt6}\cos t \end{cases},\quad t\in[0,2\pi].$$

则知

$$ds=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt6}\sin t+\frac{1}{\sqrt2}\cos t\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt6}\sin t-\frac{1}{\sqrt2}\cos t\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt6}\sin t\right)^2}\,dt=dt.$$

故

(1) $\int_\Gamma x\,ds=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt6}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t\right)dt=0.$

(2) $\int_\Gamma xy\,ds=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt6}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t\right)\left(\frac{1}{\sqrt6}\cos t+\frac{1}{\sqrt2}\sin t\right)dt=-\frac{\pi}{3}.$

(3) $\int_\Gamma x^2ds=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{\sqrt6}\cos t-\frac{1}{\sqrt2}\sin t\right)^2dt=\frac{2}{3}\pi.$

2.（16.7(5)）求$\int_\Gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz$，其中Γ为曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ x+z=1 \end{cases}$.

解 令 $\begin{cases} x=\frac{\sqrt2}{2}\cos t \\ y=\sin t \\ z=1-\frac{\sqrt2}{2}\cos t \end{cases}$，$t\in[0,2\pi]$ 有

$$\int_\Gamma y\,dx+z\,dy+x\,dz=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt2}{2}\sin^2t+\left(1-\frac{\sqrt2}{2}\cos t\right)\cos t+\frac{1}{2}\sin t\cos t\right)dt=-\sqrt2\pi.$$

3.(16.11) 设曲线 Γ_R 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $ax+by+cz+d=0$ 的交线，求极限 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R}\frac{z\,dx+x\,dy+y\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解. 注意到

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{z\,dx+x\,dy+y\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \le 2\pi R\max_{(x,y,z)\in\Gamma_R}\sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^3}} = 2\pi R\cdot\frac{1}{R^2}\to 0,\quad R\to+\infty.$$

4.(16.19) 计算第一型曲线积分 $\oint_\Gamma \cos(v_0,n)\,ds$，其中 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ 是一条光滑的封闭曲线，v_0 是某固定方向，n 是 Γ 的单位外法向量.

解. 不妨设 v_0 是单位向量，再设 v_0 沿逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后的向量为 v_1，再设 Γ 沿正向的单位切向量为 t. 则

$$\cos(v_0,n)=\cos(v_1,t).$$

于是由格林公式得

$$\oint_\Gamma \cos(v_0,n)\,ds=\oint_\Gamma\cos(v_1,t)\,ds=\oint_\Gamma v_1\cdot t\,ds=0.$$

5.(16.22) 求第二型曲线积分 $\oint_\Gamma\frac{(ax-by)dx+(bx-ay)dy}{x^2+y^2}$，其中 Γ 是平面内一条光滑的封闭曲线，且点 $(0,0)$ 在 Γ 内部.

解. 易知

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{bx-ay}{x^2+y^2}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{ax-by}{x^2+y^2}\right),$$

对于充分大的 R，圆 Γ_R: $x^2+y^2=R^2$ 与 Γ 围成不含原点的连通区域. 故

$$\oint_\Gamma\frac{(ax-by)dx+(bx-ay)dy}{x^2+y^2}=\oint_{\Gamma_R}\frac{(ax-by)dx+(bx-ay)dy}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{R^2}\oint_{\Gamma_R}(ax-by)\,dx+(bx-ay)\,dx$$

$$= \frac{1}{R^2}\iint_{D_R} 2b\,dxdy = 2b\pi.$$

6. (16.30) 设函数 $f(x,y,z)$ 在光滑封闭曲面 S 上具有二阶偏导数. 证明:

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\,dS = \iiint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)dV.$$

证明. 由高斯公式知

$$\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\,dS = \iint_S \operatorname{grad} f\cdot n\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\operatorname{grad} f\,dV = \int_D \Delta f\,dV.$$

7. (16.31(1)) 求 $\int_\Gamma 2y\,dx+z\,dy+3y\,dz$, 其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 与平面 $z=x+2$ 的交线, 从原点看去取顺时针方向.

解.

$$\int_\Gamma 2ydx+zdy+3ydz = \iint_{D(\Gamma)}\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & z & 3y \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_{D(\Gamma)} -2\sqrt{2}\,dS = -12\sqrt{2}\pi.$$

8. (16.32) 设 S 是光滑封闭曲面, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ 在 S 上具有连续偏导数, 利用斯托克斯公式求第二型曲面积分

$$\iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

解. 由斯托克斯公式再结合 S 无边界得积分为 0.

注. 当曲面无边时边界积分为 0.

9. (16.40) 证明外微分具有以下性质.

(1) 设 $\omega \in \Lambda^k$, $\eta \in \Lambda^l$, 则 $d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta$.

(2) 设 ω 是 C^2 微分形式, 则 $d^2\omega = 0$.

证明. (1) 设

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k}(x)\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}, \quad \eta = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le n} b_{j_1\cdots j_l}(x)\, dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}.$$

则

$$d(\omega\wedge\eta) = d\Big(\sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\cdots<j_l\le n}} a_{i_1\cdots i_k}(x)\, b_{j_1\cdots j_l}(x)\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\Big)$$

$$= \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\cdots<j_l\le n}} \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(a_{i_1\cdots i_k}(x)\, b_{j_1\cdots j_l}(x))}{\partial x_i}dx_i\Big)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$$

$$= \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_k\le n\\ 1\le j_1<\cdots<j_l\le n}} \Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(a_{i_1\cdots i_k}(x))}{\partial x_i} b_{j_1\cdots j_l}(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial(b_{j_1\cdots j_l}(x))}{\partial x_i} a_{i_1\cdots i_k}(x)\Big) dx_i\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}$$

$$= \Big(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(a_{i_1\cdots i_k}(x))}{\partial x_i}dx_i\Big)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\Big)\wedge\Big(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le n} b_{j_1\cdots j_l}(x)\, dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\Big)$$

$$+ (-1)^k\Big(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k}(x)\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\Big)\wedge\Big(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_l\le n}\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(b_{j_1\cdots j_l}(x))}{\partial x_i}dx_i\Big)\wedge dx_{j_1}\wedge\cdots\wedge dx_{j_l}\Big)$$

$$= d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta.$$

(2) 设

$$\omega = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} a_{i_1\cdots i_k}(x)\, dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}.$$

则

$$d^2\omega = dd\omega = d\Big(\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\partial(a_{i_1\cdots i_k}(x))}{\partial x_i}dx_i\Big)\wedge dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}\Big)$$

$$= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (a_{i_1\cdots i_k}(x))}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \sum_{1\le j<i\le n} \left(\frac{\partial^2 (a_{i_1\cdots i_k}(x))}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 (a_{i_1\cdots i_k}(x))}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= 0 .$$

10. (16.48) 设 $f, g \in C^2$，则 $\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \nabla g$.

解.

$$\Delta(fg) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 (fg)}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(f\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + g\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$$

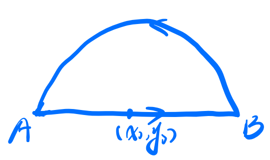
$$= f\Delta g + g\Delta f + 2\nabla f \cdot \nabla g .$$

11. 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在平面上有连续偏导数，而且对以 $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ 为心，以 $\forall r>0$ 为半径的上半圆 C: $x=x_0+r\cos\theta$, $y=y_0+r\sin\theta$ $(0\le\theta\le\pi)$ 都有

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 .$$

证明: $P(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = 0$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$.

证明. 如图所示，连接半圆周 C 的两个端点 A, B 形成闭路，记半圆域为 D，半径为 r.



则由 Green 公式和积分中值定理知存在 $M\in D$ 使得

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy=\oint_{AB+C} P\,dx+Q\,dy=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(M)\cdot\frac{\pi r^2}{2}.$$

另一方面由积分中值定理可知存在 $\xi\in[x_0-r,x_0+r]$ 使得

$$\int_{AB} P\,dx+Q\,dy=\int_{AB} P\,dx$$

$$=\int_{x_0-r}^{x_0+r} P(x,y_0)\,dx$$

$$=P(\xi,y_0)\cdot 2r$$

于是便有

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(M)\cdot\frac{\pi r}{2}=P(\xi,y_0)\cdot 2,$$

此式对于 $\forall r>0$ 都成立，则令 $r\to 0^+$ 得 $P(x_0,y_0)=0$. 再由 (x_0,y_0) 的任意性得 $P(x,y)=0$. 再由上式知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(M)=0$$

再令 $r\to 0^+$ 可得 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=0$，故由 (x_0,y_0) 的任意性知 $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)=0$.

12. (第一 Green 公式) 设 Σ 为区域 Ω 的边界曲面，分片光滑. u,v 在 $\overline{\Omega}$ 上二阶连续可微，证明:

$$\int_\Omega v\Delta u\,dx+\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx=\oint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS.$$

其中 n 为 Σ 上的单位外法向，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 u 在 n 方向上的方向导数.

证明. 由高斯定理知

$$\oint_\Sigma v\frac{\partial u}{\partial n}\,dS = \oint_\Sigma v\nabla u\cdot n\,dS$$

$$= \int_\Omega \mathrm{div}(v\nabla u)\,dx$$

$$= \int_\Omega v\Delta u\,dx + \int_\Omega \nabla v\cdot\nabla u\,dx.$$

练习. (第二 Green 公式) 设 Σ 为分片光滑封闭曲面, 围成的区域为 Ω, u, v 为 $\bar{\Omega}$ 上二次连续可微. 证明:

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \oint_\Sigma \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS,$$

其中 n 为 Σ 的单位外法向量.