数分III习题课 (12.28)

1. (17.2) 设函数 $f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续. 证明: 对于 $\forall (x,u)\in D$,
$I(x,u)=\int_c^u f(x,y)\,dy$ 存在, 并且 $I(x,u)$ 在 D 上连续.

证明. 由 $f(x,y)\in C([a,b]\times[c,u])$, 故知对于固定的 $u\in[c,d]$,

$$I(x,u)=\int_0^u f(x,y)\,dy$$

存在且关于 x 连续. 又注意到 $\forall (x_1,u_1),(x_2,u_2)\in[a,b]\times[c,d]$ 有

$$I(x_2,u_2)-I(x_1,u_1)=\int_c^{u_2} f(x_2,y)\,dy-\int_c^{u_1} f(x_1,y)\,dy$$

$$=\int_{u_1}^{u_2} f(x_2,y)\,dy+\int_c^{u_1} f(x_2,y)-f(x_1,y)\,dy,$$

易知 $I(x,u)$ 在 D 上连续.

2. (17.4) 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^{e^x}\frac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dy$　　　(2) $\lim\limits_{x\to 1}\int_0^1\frac{dy}{1+xy^2}$

解 (1) 因为 $f(x,y)=\frac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 在 $[0,1]\times[0,e]$ 上连续, 故知

$$I(x)=\int_0^{e^x} f(x,y)\,dy$$

在 $[0,1]$ 上连续, 从而得

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{e^x}\frac{\cos xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}}\,dy=\lim_{x\to 0} I(x)=I(0)=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=\ln(y+\sqrt{1+y^2})=\ln(1+\sqrt{2}).$$

(2) 因为 $f(x,y)=\dfrac{1}{1+xy^2}$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续，故知 $I(x)=\int_0^1\dfrac{dy}{1+xy^2}$ 在 $[0,1]$ 上连续. 从而

$$\lim_{x\to1}\int_0^1\frac{dy}{1+xy^2}=\lim_{x\to1}I(x)=I(1)=\int_0^1\frac{1}{1+y^2}=\frac{\pi}{4}.$$

3.(17.6) 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx$，$(b>a>0)$.

解. 由 $b>a>0$ 知

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx\right|\le\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx<+\infty$$

故 $\int_0^{+\infty}e^{-yx^2}dx$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛. 于是由含参量定积分积分定理

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\int_a^b e^{-x^2y}\,dy\,dx$$

$$=\int_a^b\int_0^{+\infty}e^{-x^2y}\,dx\,dy$$

$$=\int_a^b\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}}dy=\sqrt{b\pi}-\sqrt{a\pi}.$$

4.(17.13) 设函数 $f(x,y)=\int_{\frac12}^1\dfrac{\sin(x+yt)}{t}dt-\int_{\frac12}^1\dfrac{\sin t}{t}dt$，问：在 $x=0$ 的某个邻域内是否存在函数 $y=g(x)$，满足 $g(0)=1$ 和 $f(x,g(x))=0$？

解. 容易验证 $f(0,1)=0$，$f(x,y)$，$f_y(x,y)=\int_{\frac12}^1\cos(x+yt)\,dt$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 的某个邻域内连续，且 $f_y(0,1)=\int_{\frac12}^1\cos t\,dt\neq0$，故由隐函数存在定理知结论成立.

5. (17.17) 设函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[0,+\infty)$ 上连续，且含参量无穷积分 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dy$ 在开区间 (a,b) 内一致收敛. 证明该含参量无穷积分必在闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛. 利用此结论讨论 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x\,dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内的一致收敛性.

证明. 由 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 (a,b) 上一致收敛知对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0>0$，当 $A'>A>A_0$ 时，对 $\forall x\in(a,b)$，有

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[A,A']$ 上连续，知 $\int_A^{A'}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上连续. 故 $\exists x_0\in(a,b)$，使得

$$\left|\int_A^{A'}f(a,y)dy-\int_A^{A'}f(x_0,y)dy\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

故得

$$\left|\int_A^{A'}f(a,y)dy\right|\le\left|\int_A^{A'}f(a,y)-f(x_0,y)dy\right|+\left|\int_A^{A'}f(x_0,y)dy\right|<\varepsilon.$$

同理，得 $\left|\int_A^{A'}f(b,y)dy\right|<\varepsilon$. 故对 $\forall x\in[a,b]$，有

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y)dy\right|<\varepsilon.$$

从而 $\int_0^{+\infty}f(x,y)dy$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

由于 $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$ 发散，知 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\sin x\,dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

6. (17.24) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\sin e^{xy}dy$.

解. $\int_0^{+\infty}\sin e^{xy}dy=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\sin e^{xy}d(xy)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\sin e^{\ln z}d(\ln z)=\frac{1}{x}\int_1^{+\infty}\frac{\sin z}{z}dz\to0,\ x\to+\infty.$

7. (17.28) 设函数 $f(x)\in C[0,+\infty)$，并且 $\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ 与 $\int_0^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx$ 都收敛. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty} x^t f(x)\,dx$ 在 $(0,2)$ 内具有连续导数.

证明. 记 $f(x,t)=x^t f(x)$，$f_t'(x,t)=t x^{t-1} f(x)$，则由阿贝尔判别法知

$$\int_0^{+\infty} t x^{t-1} f(x)\,dx=\int_0^1 t x^t \frac{f(x)}{x}\,dx+\int_1^{+\infty} t x^{t-2}\,(x f(x))\,dx$$

在 $t\in(0,2)$ 上一致收敛. 又 $I(1)=\int_0^{+\infty} x f(x)\,dx$ 收敛. 故知

$$I'(t)=\int_0^{+\infty} t x^{t-1} f(x)\,dx\in C(0,2).$$

8. (Γ 函数的 Stirling 公式) 关于 Γ 函数有渐近公式:

$$\Gamma(x+1)\sim\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x,\quad x\to+\infty.$$

证明. 在 $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$ 中令 $t=x(1+u)$，得

$$\Gamma(x+1)=x^{x+1}e^{-x}\int_{-1}^{+\infty}\left[(1+u)e^{-u}\right]^x du.$$

令

$$h(u)=\begin{cases}\frac{2}{u^2}\left[u-\ln(1+u)\right], & -1<u<+\infty,\ u\neq 0.\\ 1, & u=0.\end{cases}$$

则 u 在 $(-1,+\infty)$ 上为单调递减的连续函数并满足

$$(1+u)e^{-u}=e^{-\frac{u^2}{2}h(u)}.$$

于是作代换 $u=s\sqrt{\frac{2}{x}}$ 得

$$\Gamma(x+1) = x^x e^{-x}\sqrt{2x}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,ds,$$

其中，

$$\psi_x(s) = \begin{cases} e^{-s^2 h(s\sqrt{\frac{2}{x}})}, & -\sqrt{\frac{2}{x}} < s < +\infty \\ 0, & s \le -\sqrt{\frac{2}{x}}. \end{cases}$$

容易验证：

(1) 对于每个 s，$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi_x(s) = e^{-s^2}$.

(2) 当 $x\ge 1$ 时，对 $s>0$ 有 $0<\psi_x(s)<\psi_1(s)$.

(3) 对 $s<0$ 有 $0<\psi_x(s)<e^{-s^2}$

(4) 对 $\forall A>0$，含参量积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,ds$ 在 $[-A,A]$ 上一致收敛.

(5) $\int_0^{+\infty}\psi_1(s)\,ds$ 收敛.

因此知

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_x(s)\,ds = \lim_{x\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-s^2}\,ds = \sqrt{\pi}.$$

即

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi x}\,x^x e^{-x}} = 1.$$

9. 证明 Riemann 的 zeta 函数的积分形式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}\,dx,\quad s>1.$$

证明. 对于 $x>0$，有展开式

$$\frac{1}{e^x-1} = \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}.$$

于是对于 $\forall A>0$ 有

$$\int_0^A \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \int_0^A x^{s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\right)dx.$$

对于固定的 $s>1$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{s-1}e^{-nx}$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛，故

$$\int_0^A \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^A x^{s-1}e^{-nx}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{nA}\left(\frac{y}{n}\right)^{s-1}\frac{e^{-y}}{n}dy$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\int_0^{nA} y^{s-1}e^{-y}dy.$$

易知此级数对于 $A\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的，所以有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}.$$

10. 证明：当 $b\neq 0$ 时，$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-e^{-at})\cos bt\,dt$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，在 $(0,+\infty)$ 上可导，并求出 $F(a)$.

证明. 由于 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1-e^{-at}}{t}=a$，故 $t=0$ 不是瑕点. 令

$$f(t,a)=\begin{cases}\frac{1}{t}(1-e^{-at})\cos bt, & t>0,\ a\geq 0.\\ a, & t=0,\ a\geq 0.\end{cases}$$

则 $f(t,a)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续. 由 $b\neq 0$ 知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos bt}{t}dt$ 关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛，又 $1-e^{-at}$ 对 t 单调，且 $|1-e^{-at}|\leq 2$，故由 Abel 判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}(1-e^{-at})\cos bt\,dt$ 关于 $a\in[0,+\infty)$ 一致收敛，从而在 $[0,+\infty)$ 上连续.

又 $\int_0^1 \frac{1}{t}(1-e^{-at})\cos bt\,dt$ 为常义含参量积分，故在 $[0,+\infty)$ 上也连续，所以知 $F(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

由于

$$\frac{\partial f}{\partial a}(t,a) = e^{-at}\cos bt \in C([0,+\infty)\times[0,+\infty)),$$

且 $\forall \varepsilon>0$, $a\geq\varepsilon$ 有

$$|f_a(t,a)| \leq e^{-at} \leq e^{-\varepsilon t}, \quad t\geq 0.$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}dt$ 收敛，故由 M-判别法知 $\int_0^{+\infty} f_a(t,a)\,dt$ 关于 $a\in[\varepsilon,+\infty)$ 是一致收敛的. 于是 $F(a)$ 在 $[\varepsilon,+\infty)$ 上可导，由 ε 的任意性知 $F(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，且

$$F'(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at}\cos bt\,dt, \quad a\in(0,+\infty).$$

于是知

$$F'(a) = \frac{e^{-at}}{a^2+b^2}(b\sin bt - a\cos bt)\Big|_0^{+\infty} = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

所以得

$$F(a) = \frac{1}{2}\ln(a^2+b^2) + C.$$

又 $F(0)=0$，故有

$$0 = \frac{1}{2}\ln b^2 + C,$$

得 $\quad C = -\frac{1}{2}\ln b^2$. 即得

$$F(a) = \frac{1}{2}\ln\frac{a^2+b^2}{b^2}.$$