数学分析 (III) 2023-2024 秋季学期期末试题

考试时间：2024 年 1 月 10 日

1. (10 分) 设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1]$ 中所有有理数组成的序列，定义 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的函数 $f(x,y)$ 如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & x=x_k,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & x\notin\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ 0\le y\le 1.\end{cases}$$

问：$f(x,y)$ 是否在 D 上可积？如可积，求其积分值。

2. (10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y.$

3. (10 分) 讨论 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}$ 的敛散性。

4. (10 分) 计算 $\displaystyle\iint_{y\ge x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$

5. (10 分) 计算第二型曲线积分 $\displaystyle\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴看取逆时针方向。

6. (10 分) 计算第二型曲线积分 $\displaystyle\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为三个坐标平面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的外侧。

7. (10 分) 计算 $\displaystyle\int_\Gamma\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 $\Gamma\subset\mathbb{R}^2$ 为光滑约当曲线，$(0,0)\notin\Gamma$.

8. (10 分) 计算 $\displaystyle\iint_S\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S$，其中 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为封闭光滑曲面，取外侧。其中 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3\backslash S$, $\mathbf{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $r=|\mathbf{r}|$, $\mathbf{n}$ 是 S 的单位外法向量。

9. (10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $ab\ne 0$.

10. (10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$，其中 $|a|\le 1$.

数学分析 (III) 2023-2024 秋季学期期末试题参考答案[1]

作者：汪铃　个人主页：lwmath.github.io

1. （10 分）设 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 是 $[0,1]$ 中所有有理数组成的序列，定义 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的函数 $f(x,y)$ 如下：

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{k}, & x=x_k,\ 0\le y\le 1,\\ 0, & x\notin\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}},\ 0\le y\le 1.\end{cases}$$

问：$f(x,y)$ 是否在 D 上可积？如可积，求其积分值。

解. (第十五章例 15.2.1) 可积。证明如下：对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K\in\mathbb{N}$, 使得 $\dfrac{1}{K}<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 任取 $k>K$，将 $[0,1]$ 等分成 k 个小区间，相应地将 D 等分成 k^2 个小正方形

$$\Delta D_1,\ \Delta D_2,\ \cdots,\Delta D_{k^2}.$$

这 k^2 个小正方形中至多只有 $2kK$ 个小正方形与下述线段

$$\{(x,y):\ x=x_1,x_2,\cdots,x_K,\ 0\le y\le 1\}$$

的交非空。记 $f(x,y)$ 在 $\Delta D_l\,(1\le l\le k^2)$ 上的振幅为 ω_l，则有

$$\sum_{l=1}^{k^2}\omega_l\frac{1}{k^2}\le\frac{2kK}{k^2}+\frac{\varepsilon}{2}\sum_{l=1}^{k^2}\frac{1}{k^2}=\frac{2K}{k}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此取 $k>\dfrac{4K}{\varepsilon}$，则有

$$\sum_{l=1}^{k^2}\omega_l\frac{1}{k^2}<\varepsilon.$$

于是便知 $f(x,y)$ 在 D 上可积。

对 D 的任意分割 $\Delta=\{\Delta D_1,\ \Delta D_2,\ \cdots,\Delta D_K\}$, 我们总可以取 $(\xi_k.\eta_k)\in\Delta D_k\,(k=1,2,\cdots,K)$，使得 $f(\xi_k,\eta_k)=0$. 因此

$$\sum_{k=1}^{K}f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k=0,$$

所以 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. □

2. （10 分）计算 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$.

[1]作者学识有限，解答如有疏漏，欢迎发送邮件至 lingwang@stu.pku.edu.cn 与我交流。

解. (第十五章例 15.3.3) 由于 $\dfrac{\sin y}{y}$ 的原函数无法求出，累次积分不能直接计算。为此考虑函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin y}{y}, & y\neq 0,\\ 1, & y=0\end{cases}$$

在平面区域 $D=\{(x,y):\,0\le x\le 1,\,x\le y\le\sqrt{x}\}$ 上的二重积分。由于 $f(x,y)$ 在 D 上连续，因此该二重积分可以化为累次积分。则

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y&=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{(y-y^2)\sin y}{y}\,\mathrm{d}y=1-\sin 1.\end{aligned}$$

□

3. (10 分) 讨论 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}$ 的敛散性。

解. (第十五章例 15.5.3 + 例 15.5.6 + 注 1) 令 $D_1=\{(r,\theta):\,1\le r<+\infty,0\le\theta<2\pi\}$ 以及

$$I_1=\iint_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}=\lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^R\frac{1}{r^{2\alpha-1}}\mathrm{d}r.$$

于是由一元函数无穷积分敛散性知，当 $2\alpha-1>1$, 即 $\alpha>1$ 时，I_1 收敛；当 $2\alpha-1\le 1$, 即 $\alpha\le 1$ 时，I_1 发散。

再令 $D_2=\{(r,\theta):\,0\le r\le 1,\,0\le\theta<2\pi\}$ 以及

$$I_2=\iint_{D_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^\alpha}=\lim_{\delta\to 0+0}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\delta^1\frac{1}{r^{2\alpha-1}}\mathrm{d}r.$$

于是由一元函数瑕积分敛散性知，当 $2\alpha-1<1$, 即 $\alpha<1$ 时，I_2 收敛；当 $2\alpha-1\ge 1$, 即 $\alpha\ge 1$ 时，I_2 发散。

从而，综合两种讨论知原积分对于 $\alpha\in\mathbb{R}$ 都发散。 □

4. (10 分) 计算 $\displaystyle\iint_{y\ge x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

解. 注意到 $\dfrac{1}{x^4+y^2}>0$ 以及 $(0,0)\notin\{y\ge x^2+1\}$，故知

$$\iint_{y\ge x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=2\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

直接计算得

$$\int_{x^2+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\left[x^{-2}\arctan(yx^{-2})\right]_{x^2+1}^{\infty}=x^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(1+x^{-2})\right).$$

于是知

$$\begin{aligned}
\iint_{y\geq x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2} &= 2\int_0^{\infty} x^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(1+x^{-2})\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty} x^{-2}(\pi-2\arctan(1+x^{-2}))\mathrm{d}x \\
&\overset{z=1/x}{=} \int_0^{\infty}(\pi-2\arctan(1+z^2))\mathrm{d}z \\
&= \left[\pi z-2z\arctan(1+z^2)+4\left(\frac{\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1-i}}\right)}{(1-i)^{3/2}}+\frac{\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{1+i}}\right)}{(1+i)^{3/2}}\right)\right]_0^{\infty} \\
&= \pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.
\end{aligned}$$

□

注. 本题也可以用分部积分计算，具体如下：

$$\begin{aligned}
\iint_{y\geq x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2} &= 2\int_0^{\infty} x^{-2}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan(1+x^{-2})\right)\mathrm{d}x \\
&= -2x^{-1}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1+x^{-2})\right]_0^{\infty}+2\int_0^{\infty}\frac{2x^{-3}}{1+(1+x^{-2})^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

记 $a=\sqrt{\sqrt{2}-1}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+b)^2-(ax)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+ax+b)(x^2-ax+b)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2ab}\int_0^{\infty}\left[\frac{x+a}{x^2+ax+b}-\frac{x-a}{x^2-ax+b}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4b}\frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}} \\
&= \frac{\pi\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.
\end{aligned}$$

于是便知

$$\iint_{y\geq x^2+1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=2\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+x^2+\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}.$$

5.（10 分）计算第二型曲线积分 $\int_{\Gamma} x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，从 z 轴看取逆时针方向。

解. (第十六章例 16.2.3) **解法 1** 作正交变换将 Γ 变到 $O\xi\eta$ 平面:

$$\begin{cases}\xi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y),\\ \eta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(x+y-2z),\\ \zeta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z).\end{cases}$$

然后利用 $\xi=\cos t, \eta=\sin t$ 代入上述 Γ 的方程，即得 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases}x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sin t,\\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\sin t,\\ z = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}\sin t.\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z\\ &\quad=\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin t\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\right)\right.\\ &\qquad+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{6}}\sin t\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t+\frac{1}{\sqrt{6}}\cos t\right)\\ &\qquad\left.+\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\sin t\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}\cos t\right)\right]\mathrm{d}t\\ &\quad=\int_0^{2\pi}0\ \mathrm{d}t=0.\end{aligned}$$

解法 2 由于球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上每个点 (x,y,z) 在 $\mathbb{R}^3$ 中表示的向量即是球面在该点的单位外法向量 $\mathbf{n}$, 而曲线 Γ 每个点处的单位切向量 $\mathbf{v}$ 与球面在该点的法向量正交。因此由

$$\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\int_\Gamma \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\ \mathrm{d}s=0.$$

□

6. (10 分) 计算第二型曲线积分 $\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 为三个坐标平面与平面 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的外侧。

解. (第十六章例 16.4.2) **解法 1** 记 S 落在 Oxy, Oyz, Ozx 平面上的部分分别为 S_z, S_x, S_y, 落在平面 $x+y+z=1$ 的部分为 S_1. 在 S_z 上，$z=0$, $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$, 从而

$$\iint_{S_z} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

同理，在 S_y 与 S_x 上的积分都为零。因此

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

记 $D = \{(x,y):\, x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$, 则由对称性得

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iint_D (1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

解法 2 与解法 1 同理得

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于在 S_1 上点 (x,y,z) 处的方向余弦 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 即为 S_1 的单位法向量，且

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

而 S_1 是一个三角形，其面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因此

$$\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{S_1} \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S = \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_{S_1} \mathrm{d}S = \frac{1}{2}.$$

$\square$

7.（10 分）计算 $\displaystyle\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ 为光滑约当曲线，$(0,0) \notin \Gamma$.

解. (第十六章例 16.5.2) 记 $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, 则对任意的 $(x,y) \neq (0,0)$, 有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

因此，设 Γ 所围成的区域为 D，则当 $(0,0) \notin D$ 时，由格林公式有

$$\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

当 $(0,0) \in D$ 时，格林公式的条件不满足。对于 $R > 0$, 设

$$\Gamma_R = \{(x,y):\, x^2+y^2 = R^2\}.$$

取 R 充分大使得 Γ 落在 Γ_R 内部，则 Γ 与 Γ_R 围成一个二连通区域 D_R，在此区域上应用格林公式有

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{D_R} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Gamma_R} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{\Gamma^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y &= \int_{\Gamma_R} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \\ &= \int_{\Gamma_R} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{R^2}\int_{\Gamma_R} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{r^2}\iint_{\{x^2+y^2\le R^2\}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.\end{aligned}$$

□

8. (10 分) 计算 $\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S$，其中 $S\subset\mathbb{R}^3$ 为封闭光滑曲面，取外侧。其中 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3\backslash S$, $\mathbf{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$, $r=|\mathbf{r}|$, $\mathbf{n}$ 是 S 的单位外法向量。

解. (第十六章例 16.5.4) 记 D 为以 S 为边界的有界闭区域。由于

$$\cos(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \frac{x-x_0}{r}\cos(x,\mathbf{n}) + \frac{y-y_0}{r}\cos(y,\mathbf{n}) + \frac{z-z_0}{r}\cos(z,\mathbf{n}),$$

因此

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S = \iint_S \frac{x-x_0}{r^3}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{y-y_0}{r^3}\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \frac{z-z_0}{r^3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-x_0)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-y_0)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-z_0)^2}{r^5},\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-x_0}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y-y_0}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-z_0}{r^3}\right) = 0.$$

因此，当 $(x_0,y_0,z_0)\notin D$ 时，由高斯公式得

$$\iint_S \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S = 0.$$

当 $(x_0,y_0,z_0)\in D$ 时，我们可取 ε 充分小使得球面

$$S_\varepsilon = \{(x,y,z):\,(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\varepsilon^2\}$$

完全落在 D 的内部。取 S_ε 的内侧 S_ε^-，设闭区域 D_ε 以 $S\cup S_\varepsilon^-$ 为边界，则

$$\iint_{S\cup S_\varepsilon^-}\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S=\iiint_{D_\varepsilon}0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

注意到在 S_ε 上 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{n}$ 平行，所以

$$\begin{aligned}\iint_S\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S&=-\iint_{S_\varepsilon^-}\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S=\iint_{S_\varepsilon}\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{r^2}\,\mathrm{d}S\\&=\iint_{S_\varepsilon}\frac{\mathrm{d}S}{\varepsilon^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2=4\pi.\end{aligned}$$

□

9. (10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $ab\neq 0$.

解. 解法 1 将 b 视为常数，a 视为参变量。令

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,\mathrm{d}x.$$

下面先考虑 $a>0,b>0$ 的情形。直接求导得

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\,\mathrm{d}x.$$

若 $a=b$，则 $I'(a)=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2x\,\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2a}$. 若 $a\neq b$，令 $t=\tan x$，则

$$\begin{aligned}I'(a)&=\frac{2}{a}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^2)(\frac{b^2}{a^2}+t^2)}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{a}\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\arctan t-\frac{b^2}{a^2-b^2}\arctan\frac{at}{b}\right)\Bigg|_0^{+\infty}\\&=\frac{\pi}{a+b}.\end{aligned}$$

因此得

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b},\quad 0<a<+\infty,$$

故知

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+C,\quad 0<a<+\infty.$$

由 $I(b)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(b^2\sin^2x+b^2\cos^2x)\,\mathrm{d}x=\pi\ln b$, 可知 $C=-\pi\ln 2$. 于是

$$I(a)=\pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad 0<a<+\infty.$$

当 $a<0$ 或 $b<0$ 时，都可划归为 $a>0, b>0$ 的情形。事实上，我们有

$$
\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(|a|^2\sin^2 x + |b|^2\cos^2 x)\ \mathrm{d}x \\
&= I(|a|) = \pi \ln\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right).
\end{aligned}
$$

从而得

$$
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\ \mathrm{d}x = \pi \ln\left(\frac{|a|+|b|}{2}\right).
$$

解法 2 类似解法 1，我们只考虑 $a>0, b>0$ 的情形。令

$$
F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x)\ \mathrm{d}x.
$$

直接求偏导得

$$
\begin{aligned}
\partial_a F(a,b) &= 2a\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ \mathrm{d}x, \\
\partial_b F(a,b) &= 2b\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由此便得下列偏微分方程

$$
a\partial_a F(a,b) + b\partial_b F(a,b) = \pi.
$$

求解此方程并注意到 $F(a,a) = \pi\ln a$，我们有

$$
F(a,b) = \pi\ln\left(\frac{a+b}{2}\right).
$$

□

10. (10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x$，其中 $|a|\le 1$.

解. 注意到

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{x\to 0+0} \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0+0} \frac{-2a^2x}{2x(1-a^2x^2)} = -a^2,
\end{aligned}
$$

故 $x=0$ 不是瑕点，于是可知被积函数在 $0\le x<1, |a|\le 1$ 内连续。又当 $|a|\le 1$ 时有

$$
\left|\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right| \le -\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}, \quad 0<x<1,
$$

且

$$\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\frac{2}{3}}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 1-0}(1-x)^{\frac{1}{6}}\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1+x}}=0,$$

于是知积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ 对 $|a|\le 1$ 一致收敛，从而为 $a\in[-1,1]$ 的连续函数。又注意到

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)\,\mathrm{d}x=-2a\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

以及对于任意 $0<a_0<1$ 有

$$\left|\frac{2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}\right|\le\frac{2}{1-a_0^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad 0\le x<1,$$

于是知 $\displaystyle\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)\,\mathrm{d}x$ 对 $|a|\le a_0<1$ 一致收敛。记

$$I(a)=\int_0^1\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

则知

$$I'(a)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\right)\,\mathrm{d}x=-2a\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}},\quad |a|\le a_0.$$

于是由 $a_0<1$ 的任意性知上式对 $|a|<1$ 均成立。令 $x=\sin t$，则

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1-a\sin t}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin t}\right).$$

又注意到

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{1-a\sin t}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)+C,$$
$$\int\frac{\mathrm{d}t}{1+a\sin t}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}+a}{\sqrt{1-a^2}}\right)+C.$$

从而有

$$\begin{aligned}I'(a)&=-\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}}\left[\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)+\arctan\left(\frac{\tan\frac{t}{2}+a}{\sqrt{1-a^2}}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=-\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}},\quad |a|<1,\end{aligned}$$

在上述等式中我们用到了

$$\arctan\left(\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}}\right)+\arctan\left(\frac{1+a}{\sqrt{1-a^2}}\right)=\frac{\pi}{2},$$

因为 $\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \dfrac{1+a}{\sqrt{1-a^2}} = 1.$
于是我们便有

$$I(a) = -\pi \int \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\ \mathrm{d}a = \pi\sqrt{1-a^2} + C, \quad |a| < 1.$$

又注意到 $I(0) = 0$, 我们知 $C = -\pi$. 从而

$$I(a) = \pi\sqrt{1-a^2} - \pi, \quad |a| < 1.$$

最后再由 $I(a)$ 在 $[-1,1]$ 上连续知 $I(1) = I(-1) = -\pi$. 综上便得

$$I(a) = \pi\sqrt{1-a^2} - \pi, \quad |a| \le 1.$$

$\square$

注. 此题还可通过泰勒展开求解，思路如下，细节留给读者。
由 $\ln(1-a^2x^2)$ 的泰勒级数并结合

$$\int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2k}\ \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}$$

得

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k+2}}{k+1} \int_0^1 \frac{x^{2k}}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}}\binom{2k}{k}\frac{a^{2(k+1)}}{k+1}, \quad |a| < 1. \end{aligned}$$

求导并利用 $(1-a^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的泰勒级数得

$$I'(a) = -\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}}, \quad |a| < 1.$$