数学分析 (III) 2023-2024 秋季学期期中试题

考试时间：2023 年 11 月 8 日

1. （10 分）设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 是两个非空集合，定义 $d(A,B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} |x-y|$. 证明：如果紧集 A, B 满足 $d(A,B)=0$，则必有 $A\cap B \neq \emptyset$.

2. （10 分）判断极限 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 是否存在?

3. （10 分）设 $A \subset \mathbb{R}^n$ 是非空集合，证明：函数 $f(x) = \inf\limits_{y\in A} |x-y|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续。

4. （10 分）判断函数 $f(x,y) = \sqrt{xy}$ 在 $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x\geq 0, y\geq 0\}$ 上是否一致连续?

5. （10 分）假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为凸区域，函数 $f(x)$ 在 D 内存在 n 个连续并且有界的偏导数，证明 $f(x)$ 在 D 内一致连续。

6. （10 分）研究函数 $f(x,y) = \dfrac{ax+by+c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ 的极值，其中 $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

7. （10 分）求函数 $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ 的偏导数。

8. （10 分）假设 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

9. （10 分）求函数 $f(x_1,\cdots,x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 在球面 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ 上的极值，其中 $a_{ij} = a_{ji}$.

10. （10 分）求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点，这点到 n 个已知点 $M_i = (x_i, y_i, z_i)$, $1\leq i\leq n$, 距离的平方和最小。

数学分析（III）2023-2024 秋季学期期中试题参考答案[1]

作者：汪铃　个人主页：lwmath.github.io

1.（10 分）设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 是两个非空集合，定义 $d(A,B) = \inf\limits_{x\in A, y\in B} |x-y|$. 证明：如果紧集 A, B 满足 $d(A,B)=0$，则必有 $A\cap B \neq \emptyset$.

证明.（第十三章习题 11(3)）由 $d(A,B)=0$ 知，存在序列 $\{x_n\}\subset A$ 以及 $\{y_n\}\subset B$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

再注意到 A 是紧集，我们可以知道序列 $\{x_n\}$ 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，于是存在 $x\in A$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) = 0$, 因此知

$$d(y_{n_k}, x) \le d(x_{n_k}, y_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) \to 0, \quad k\to\infty,$$

即是 $\lim\limits_{k\to\infty} d(y_{n_k}, x) = 0$. 又 B 是紧集，故而是闭集，所以知 $x\in B$, 因此有 $x\in A\cap B$, 即得 $A\cap B\neq\emptyset$. □

2.（10 分）判断极限 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 是否存在?

解.（第十三章习题 14(8)）存在。只需注意到

$$\left|\frac{\sin(xyz)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right| \le \frac{|xyz|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \le \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}} (x^2+y^2+z^2).$$

□

3.（10 分）设 $A\subset\mathbb{R}^n$ 是非空集合，证明：函数 $f(x) = \inf\limits_{y\in A}|x-y|$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续。

证明.（第十三章习题 27）对 $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, $y\in A$ 有

$$|x_1-y| \le |x_2-y| + |x_1-x_2|.$$

则有

$$f(x_1) = \inf_{y\in A}|x_1-y| \le |x_2-y| + |x_1-x_2|.$$

从而有

$$|x_2-y| \ge f(x_1) - |x_1-x_2|,$$

于是

$$f(x_2) = \inf_{y\in A}|x_2-y| \ge f(x_1) - |x_1-x_2|.$$

[1]作者学识有限，解答如有疏漏，欢迎发送邮件至 lingwang@stu.pku.edu.cn 与我交流。

同理，我们有

$$f(x_1) \geq f(x_2) - |x_1 - x_2|,$$

故

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|,$$

即 $f(x)$ 是 Lipschitz 连续，从而易知其一致连续。 $\square$

4.（10 分）判断函数 $f(x,y) = \sqrt{xy}$ 在 $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$ 上是否一致连续?

解.（第十三章习题 28）不一致连续。取点列 $(x_k', y_k') = (1/k, k)$ 和 $(x_k'', y_k'') = (0, k)$ 即可。 $\square$

5.（10 分）假设 $D \subset \mathbb{R}^n$ 为凸区域，函数 $f(x)$ 在 D 内存在 n 个连续并且有界的偏导数，证明 $f(x)$ 在 D 内一致连续。

证明.（第十四章习题 23(1)）对于 $\forall x, y \in D$，由 D 是凸区域知存在一条包含在 D 中的线段连接 x，y, 记其为 $\gamma(t) := x + t(y - x)$, $t \in [0,1]$. 于是由 $f(x)$ 在 D 内存在 n 个连续并且有界的偏导数知存在 $M > 0$，使得 $|\mathbf{grad} f| \leq M$. 因此由一元函数的 Lagrange 微分中值定理知存在 $t_0 \in (0,1)$ 使得

$$|f(x) - f(y)| = \left| \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=t_0} \right| = |\mathbf{grad} f(\gamma(t_0)) \cdot (y - x)| \leq M|x - y|.$$

由此便知 $f(x)$ 在 D 内一致连续。 $\square$

6.（10 分）研究函数 $f(x,y) = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ 的极值，其中 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

证明.（转化为限制极值问题，利用拉格朗日乘数法。）因为

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} = 1,$$

所以研究函数 $f(x,y) = \dfrac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$ 的极值等价于研究 $g(x,y,z) = ax + by + cz$ 在上半球面 $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$ 的极值。

由拉格朗日乘数法，作函数 $F(x,y,z,\lambda) = ax + by + cz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = a - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = b - 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = c - 2\lambda z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2\lambda}, \\ y = \dfrac{b}{2\lambda}, \\ z = \dfrac{c}{2\lambda}. \end{cases} \quad \text{以及} \quad 2\lambda = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2} \neq 0.$$

由于 $z > 0$，于是知当 $c = 0$ 时，原式无极值点。当 $c > 0$ 时，有

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \\ z = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \end{cases}$$

考虑此时的 Hessian 矩阵

$$H_F = \begin{pmatrix} -\sqrt{a^2+b^2+c^2} & & \\ & -\sqrt{a^2+b^2+c^2} & \\ & & -\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{pmatrix},$$

知其是负定的，故 $g(x,y,z)$ 有唯一的极大值点

$$(x,y,z) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right),$$

即最大值点，从而 $g(x,y,z)$ 的最大值为

$$g\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

此时无最小值。

类似地，当 $c < 0$ 时得到最小值为

$$g\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right) = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

此时无最大值 □

7.（10 分）求函数 $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ 的偏导数。

解.（第十四章习题 4(12)）直接计算得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{z}{x}\left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln\frac{x}{y}.$$

□

8.（10 分）假设 $F(x+y+z,x^2+y^2+z^2)=0$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解.（没找到简单的方法算出来...）直接求导得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_1'+2xF_2'}{F_1'+2zF_2'},\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_1'+2yF_2'}{F_1'+2zF_2'},\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= -\frac{F_{11}'(1+\frac{\partial z}{\partial x})(1+\frac{\partial z}{\partial y})+F_{12}'(1+\frac{\partial z}{\partial x})(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y})}{F_1'+2zF_2'}\\
&\quad -\frac{F_{12}'(1+\frac{\partial z}{\partial y})(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})+F_{22}'(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x})(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y})+2F_2'\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}}{F_1'+2zF_2'}\\
&= -\frac{1}{(F_1'+2zF_2')^3}\Big\{4(z-x)(z-y)\big(F_{11}'F_2'^2-2F_{12}'F_1'F_2'+F_{22}'F_1'^2\big)\\
&\quad +2F_2'(F_1'+2xF_2')(F_1'+2yF_2')\Big\}.
\end{aligned}$$

□

9.（10 分）求函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ 在球面 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$ 上的极值，其中 $a_{ij}=a_{ji}$.

解. 记 $A=\{a_{ij}\}$, 由 $a_{ij}=a_{ij}$ 知 A 是对称矩阵，于是存在正交矩阵 U, 使得 $U^TAU=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为 A 的特征值。令 $x=Uy$（将 x 看作列向量），定义函数 $g(y)=f(Uy)$, 则知

$$g(y)=f(Uy)=(Uy)^TAUy=y^Tdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)y=\lambda_1y_1^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

且

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2=y^Ty=(Uy)^TUy=x^Tx=1.$$

故原问题等价于求解 $g(y)$ 在球面 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^2=1$ 上的极值。由此通过简单放缩并取点验证易知最大值为 $\max\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$，最小值为 $\min\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$. □

10.（10 分）求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上的点，这点到 n 个已知点 $M_i=(x_i,y_i,z_i)$, $1\le i\le n$, 距离的平方和最小。

解. 利用拉格朗日乘数法，作函数

$$F(x,y,z,\lambda)=\sum_{i=1}^{n}\left[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right]-\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(x - x_i) - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(y - y_i) - 2\lambda y = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(z - z_i) - 2\lambda z = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n - \lambda}, \\ y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n - \lambda}, \\ z = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_i}{n - \lambda}. \end{cases} \quad \text{以及} \quad n - \lambda = \pm\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}.$$

考虑 Hessian 矩阵

$$H_F = \begin{pmatrix} 2n - 2\lambda & & \\ & 2n - 2\lambda & \\ & & 2n - 2\lambda \end{pmatrix},$$

于是知矩阵当 $n - \lambda = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}$ 时是正定的，故

$$(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} z_i\right)^2}} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} y_i, \sum_{i=1}^{n} z_i\right)$$

为极小值点，再由紧集上的连续函数一定能取到最值以及球面无边界点知极小值点一定为最小值点，所以得上述点也为最小值点。 $\square$