北京大学数学科学学院期末考试参考答案

2020 - 2021 学年第 2 学期

考试科目 高等数学 B2

姓　　名 ________　　　　学　　号________

本试题共 7 道大题，满分 100 分

说明： 在下面所有题目中， $\mathbb{R}$ 代表实数域。

1.(15分) 求出函数 $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开式。

参考答案:

（1）可以直接引用教材第275页中熟知公式：当 $t\in(-1,1)$ 时，

$$\ln(1+t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}$$

（2） t 代入 x^2 得: 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

（3） t 代入 $-x^2$ 得: 当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\ln(1-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-x^2)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n+1}$$

（4） 从上面（2）（3）推出

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2)-\ln(1-x^2)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{n+1}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2(2k)+2}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{4k+2}}{2k+1}\end{aligned}$$

2.(15分) 两小题。

（1）.(8分) 求出无穷积分 $\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\,e^{-x}\,dx$ 的值。

（2）.(7分) 求出瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}\,dx$ 的值。

参考答案:

（1）

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty}x^{\frac{3}{2}-1}\,e^{-x}\,dx = \Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

（2）

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx \;=\; \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\,dx \;=\; B\,(\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,)$$

$$=\;\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\;\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)}\;=\;\frac{\sqrt{\pi}\,\sqrt{\pi}}{1}\;=\;\pi$$

3.(15分) 求出幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,x^n$ 的收敛区间，及其和函数。

参考答案:

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\,n\,(n+1)\,x^{n-1}$ 收敛半径是

$$R\;=\;\lim_{n\to\infty}\;\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}\;=\;1$$

所以此级数的 收敛区间是（-1 , 1）.

（2）当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\,x^{n+1}\;=\;\frac{1}{1\,-\,x}-1-x$$

幂函数在收敛区间内可以逐项求导，推出当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\,x^n\;=\;-\;\frac{1}{(1-x)^2}-1$$

4.(15分) 任意 **取定** $r>0$. 证明含参变量 y 的无穷积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x\,y^2}\cos x\,dx$ 对于 $y\in[\,r\,,\,+\infty\,)$ 是一致收敛的。

参考答案:

（1）对于每个给定的 $y\;\in[r,+\infty)\in[r,+\infty)$， $e^{-x\,y^2}$ 对于 x 是单调函数。

（2）对于一切 $y\in[r,+\infty)$ 时，有

$$e^{-x\,y^2}\;\;\le\;\;e^{-x\,r^2}$$

$e^{-x\,r^2}$ 与 y 无关，并且当 $x\to+\infty$ 时，$e^{-x\,r^2}$ 收敛于 0. 所以，当 $x\to+\infty$ 时， $e^{-x\,y^2}$ 对于 $y\in[r,+\infty)$ 一致收敛于 0.

(3) 对于任意 $A>a$ 及一切 $y\in[r,+\infty)$，

$$|\int_a^A\cos x\,dx|\;=\;|\;\sin\,A\;-\;\sin\;a\,|\;\le 2$$

一致有界。

因此，根据 狄利克雷判别法， 含参变量 y 的无穷积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x\,y^2}\cos x\,dx$ 在 $[\,r\,,\,+\infty\,)$ 上一致收敛。

5.(10分) 求出函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{1}{n^x+n}$ 的 收敛域。

参考答案:

（1） 为了研究 $\frac{1}{n^x+n}$ 的单调性，把 n 换为实变量 y .

给定 $\mathbf{x \geq 0}$, 当 变量 $y \geq 1$ 时，

$$(y^x + y)'_y \ = \ x\, y^{x-1} \ + \ 1 \ \geq \ 0 \ + \ 1 \ > \ 0$$

（2） **给定 $\mathbf{x < 0}$**, 当 变量 y 趋于 $+\infty$ 时， $x\, y^{x-1}$ 趋于 0 . 因此, 当 y **充分大** 时，

$$(y^x \ + \ y)'_y \ = \ x\, y^{x-1} \ + \ 1 \ > \ -\frac{1}{2} \ + \ 1 \ > \ 0$$

（3）所以, 对于任何 **给定** 的 $x \in \mathbb{R}$ ，当 n **充分大** 后， $n^x + n$ 是单调上升的，因此 $\frac{1}{n^x+n}$ 是**单调下降** 的，并且 $\frac{1}{n^x+n}$ **趋向于** 0 。

（4）因此， 对任何 **给定** $x \in \mathbb{R}$ ，根据 莱布尼兹判别法， 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^x+n}$ 是收敛的。即， 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^x+n}$ 的收敛域是 $(-\infty,\, \infty)$.

6.(20分) 贯通三小题。

（1）.(10分) 设 p 是 **非整数** 的实数, $(-\infty,\, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $[-\pi\,,\, \pi)$ 等于 $\cos\,(\,p\,x\,)$. 求出 $f(x)$ 的 傅里叶级数, 及其 和函数。

（2）.(3分) 明确写出从上面（1）中 $\cos\,(\,p\,x\,)$ 的傅里叶展开式 推出下面等式的详细 **推导过程：** 当 $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t}{\pi}$ **不是整数** 时, 有

$$\frac{1}{\sin t} \ = \ \frac{1}{t} \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right) \ .$$

（3）.(7分) 明确写出从上面（2）中 $\frac{1}{\sin t}$ 的展开式 推出下面等式的详细 **推导过程:**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \ = \ \frac{\pi}{2} \ .$$

注: 本小题（2）（3）考的是（1）（2）（3）之间的内在联系和对知识的融会贯通能力。（2）（3）中的等式有多种证明，但对于本小题（2）（3）的考核目的来说，如果没有明确写出题目中所要求的推导过程，则不能得分。

参考答案:

（1）

（1.1） $f(x)$ 是偶函数，所以当 $n > 0$ 时，傅里叶系数 $b_n = 0.$

（1.2）傅里叶系数

$$a_0 \ = \ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos px\, dx \ = \ \frac{2\ \sin\ p\pi}{p\pi}$$

（1.3）当 $n > 0$ 时，用分部积分法求出傅里叶系数

$$a_n \ = \ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos px\ \cos\ nx\, dx \ \ = \ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos px\ \cos\ nx\, dx$$

$$= \ \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\,\cos(p+n)x \ + \ \cos(p-n)x\,)dx$$

$$= \frac{1}{(p+n)\pi}\sin(p-n)x + \frac{1}{(p-n)\pi}\sin(p+n)x \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{(p+n)\pi}\sin(p-n)\pi + \frac{1}{(p-n)\pi}\sin(p+n)\pi$$

$$= \frac{1}{(p+n)\pi}\sin p\pi \quad \cos(-n\pi) + \frac{1}{(p-n)\pi}\sin p\pi \quad \cos n\pi$$

$$= (-1)^n \left(\frac{1}{p+n} + \frac{1}{p-n} \right) \frac{\sin p\pi}{\pi}$$

（1.4） $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{\sin\ p\pi}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{p+n} + \frac{1}{p-n} \right) \frac{\sin p\pi}{\pi} \ \cos nx$$

$$= \frac{\sin\ p\pi}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2p\ \sin p\pi}{p^2-n^2} \ \cos nx$$

（1.5）$f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段连续、分段单调。因此，根据狄利克雷定理得： 在 $[-\pi, \pi]$ 上 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数是 $\cos px$， 即

当 $-\pi \leq x \leq \pi$ 时， 有 傅里叶展开式

$$\cos px = \frac{\sin\ p\pi}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{p+n} + \frac{1}{p-n} \right) \frac{\sin p\pi}{\pi} \ \cos nx$$

（2）

在上面 傅里叶展开式中， 令 $x=0$ 得

$$1 = \frac{\sin\ p\pi}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{p+n} + \frac{1}{p-n} \right) \frac{\sin p\pi}{\pi}$$

p **不是整数** 推出 $\sin p\pi \neq 0$, 因此

$$\frac{1}{\sin p\pi} = \frac{1}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{p\pi+n\pi} + \frac{1}{p\pi-n\pi} \right)$$

令 $t = p\,\pi$ 得到： 当 $\frac{t}{\pi} = p$ **不是整数** 时， 有

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right)$$

（3）

（3.1）

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left(\int_0^{k\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int_{k\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\sin t}{t}\,dt \right)$$

此处 k 选为整数使得

$$k\,\frac{\pi}{2} \leq A < (k+1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$\Big| \int_{k\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\sin t}{t}\, dt \Big| \ \le\ \int_{k\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{1}{k\frac{\pi}{2}}\ dt \ =\ \frac{1}{k\frac{\pi}{2}}\,(A - k\ \frac{\pi}{2}) \ \le\ \frac{1}{k\frac{\pi}{2}}\ \frac{\pi}{2}\ \to\ 0$$

推出

$$\lim_{A\to+\infty} \int_{k\frac{\pi}{2}}^{A} \frac{\sin t}{t}\, dt \ =\ 0$$

推出

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \ =\ \lim_{A\to+\infty}\ \int_{0}^{k\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt \ =\ \lim_{k\to+\infty}\ \int_{0}^{k\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

（3.2）

$$\lim_{k\to+\infty}\ \int_{0}^{k\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt \ =\ \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt \ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\ (\ \int_{2n\frac{\pi}{2}}^{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_{(2n+1)\frac{\pi}{2}}^{(2n+2)\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt\ )$$

$$=\ \sum_{n=0}^{\infty}\ (\ \int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt\ +\ \int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}\ \frac{\sin t}{t}\, dt\ )$$

其中

$$\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}\ \frac{\sin t}{t}\, dt \quad \stackrel{t=-s}{=}\ \int_{-n\pi-\frac{\pi}{2}}^{-(n+1)\pi}\ \frac{\sin(-s)}{-s}\,(-ds)\ =\ \int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi-\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin s}{s}\, ds$$

$$=\ \int_{-(n+1)\pi}^{-(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin s}{s}\, ds\ =\ \int_{-(n+1)\pi}^{-(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt$$

代入上式得

$$\lim_{k\to+\infty}\ \int_{0}^{k\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt\ =\ \sum_{n=0}^{\infty}\ (\ \int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt\ +\ \int_{-(n+1)\pi}^{-(n+1)\pi+\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin t}{t}\, dt\ )$$

$$\stackrel{t=y+n\pi=z-(n+1)\pi}{=}\ \sum_{n=0}^{\infty}\ (\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin(y+n\pi)}{y+n\pi}\, dy\ +\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin(z-(n+1)\pi)}{z-(n+1)\pi}\, dz\ )$$

$$=\ \sum_{n=0}^{\infty}\ (\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin(y+n\pi)}{y+n\pi}\, dy\ +\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin(z-(n+1)\pi)}{z-(n+1)\pi}\, dz\ )$$

$$=\ \sum_{n=0}^{\infty}\ (\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin y\ \cos n\pi}{y+n\pi}\, dy\ +\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ \frac{\sin z\ \cos((n+1)\pi)}{z-(n+1)\pi}\, dz\ )$$

$$=\ \sum_{n=0}^{\infty}\ (\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ (-1)^n\, \frac{\sin y}{y+n\pi}\, dy\ +\ \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ (-1)^{n+1}\, \frac{\sin z}{z-(n+1)\pi}\, dz\ )$$

$$=\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ (-1)^n\, \frac{\sin y}{y+n\pi}\, dy\ +\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ (-1)^{n+1}\, \frac{\sin z}{z-(n+1)\pi}\, dz$$

$$=\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ (-1)^n\, \frac{\sin t}{t+n\pi}\, dt\ +\ \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ (-1)^{n+1}\, \frac{\sin t}{t-(n+1)\pi}\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{\sin t}{t+n\pi}\,dt \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-1)^n \frac{\sin t}{t-n\pi}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((-1)^n \frac{\sin t}{t+n\pi} + (-1)^n \frac{\sin t}{t-n\pi} \right) dt$$

（3.3） 当 $t \in [\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$， $n \geq 1$ 时

$$\left| \left((-1)^n \frac{\sin t}{t+n\pi} + (-1)^n \frac{\sin t}{t-n\pi} \right) \right| \ = \ \frac{2t\,|\sin t|}{-t^2+n^2\pi^2} \ \leq \ \frac{\pi}{n^2\pi^2 - (\frac{\pi}{2})^2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{n^2\pi^2-(\frac{\pi}{2})^2}$ 收敛，和强级数判别法 推出： 在 $[\,0\,,\,\frac{\pi}{2}\,]$ 上

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\sin t}{t+n\pi} + (-1)^n \frac{\sin t}{t-n\pi} \right)$$

一致收敛，因此可以逐项积分得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((-1)^n \frac{\sin t}{t+n\pi} + (-1)^n \frac{\sin t}{t-n\pi} \right) dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\sin t}{t+n\pi} + (-1)^n \frac{\sin t}{t-n\pi} \right) dt$$

代人（3.2）最后一式得

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^{k\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t}\,dt \ + \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{\sin t}{t+n\pi} + (-1)^n \frac{\sin t}{t-n\pi} \right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \left(\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right) \right) dt$$

（3.4）代人上面（2）中展开式得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \left(\frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right) \right) dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ \frac{1}{\sin t}\ dt \ = \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ dt \ = \ \frac{\pi}{2}$$

（3.5）把（3.1）最后一式和（3.3）最后一式和（3.4）中等式连接起来就得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt \ = \ \frac{\pi}{2}$$

7.(10分) 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是**单调下降** 的 **连续** 函数（**没有**假定 $(0,+\infty)$ 上导函数 $f'(x)$ 的存在）， C 和 D 都是实数， $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=C$， $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=D$， $0<a<b$. 求出广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

的值。

注：本题中**没有**假定 $(0,+\infty)$ 上导函数 $f'(x)$ 的存在。因此，如果本题解答中用到了导函数 $f'(x)$ 的存在性，则不能得分。

参考答案:

（1）

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx=\lim_{c\to 0+,\ A\to+\infty}\int_c^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$$

$$=\lim_{c\to 0+,\ A\to+\infty}\left(\int_c^A\frac{f(ax)}{x}\,dx-\int_c^A\frac{f(bx)}{x}\,dx\right)$$

$$=\lim_{c\to 0+,\ A\to+\infty}\left(\int_{ac}^{aA}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{bc}^{bA}\frac{f(t)}{t}\,dt\right)$$

$$=\lim_{c\to 0+,\ A\to+\infty}\left(\int_{ac}^{bc}\frac{f(t)}{t}\,dt+\int_{bc}^{aA}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{bc}^{aA}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\,dt\right)$$

$$=\lim_{c\to 0+,\ A\to+\infty}\left(\int_{ac}^{bc}\frac{f(t)}{t}\,dt-\int_{aA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\,dt\right)$$

$$=\lim_{c\to 0+}\int_{ac}^{bc}\frac{f(t)}{t}\,dt-\lim_{A\to+\infty}\int_{bA}^{bA}\frac{f(t)}{t}\,dt$$

（3） f 是 单调下降的, $0<ac\le t\le bc$ 推出

$$\frac{f(bc)}{t}\le\frac{f(t)}{t}\le\frac{f(ac)}{t}$$

推出

$$\int_{ac}^{bc}\frac{f(bc)}{t}\,dt\le\int_{ac}^{bc}\frac{f(t)}{t}\,dt\le\int_{ac}^{bc}\frac{f(ac)}{t}\,dt$$

推出

$$f(bc)\int_{ac}^{bc}\frac{1}{t}\,dt\le\int_{ac}^{bc}\frac{f(t)}{t}\,dt\le f(ac)\int_{ac}^{bc}\frac{1}{t}\,dt$$

推出

$$f(bc)\ ln\,\frac{b}{a}\le\int_{ac}^{bc}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\le f(ac)\ ln\,\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=C$$

推出

$$\lim_{c\to 0+}\int_{ac}^{bc}\frac{f(t)}{t}\,dt=C\,ln\,\frac{b}{a}$$

（4） f 是 单调下降的， $0 < aA \ \leq \ t \ \leq \ bA$ 推出

$$\frac{f(bA)}{t} \ \leq \ \frac{f(t)}{t} \ \leq \ \frac{f(aA)}{t}$$

推出

$$f(bA) \int_{ac}^{bc} \frac{1}{t}\, dt \ \leq \ \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}\, dt \ \leq \ f(aA) \int_{aA}^{bA} \frac{1}{t}\, dt$$

推出

$$f(bA) \ ln\frac{b}{a} \ \leq \ \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}\, dt \ \leq \ f(aA) \ ln\,\frac{b}{a}$$

推出

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = D$$

推出

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{aA}^{bA} \frac{f(t)}{t}\, dt \ = \ D\, ln\, \frac{b}{a}$$

（5）： 上面（3）（4）合推出

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{f(ax) \ - \ f(bx)}{x}\, dx \ = \ C\, ln\, \frac{b}{a} - D\, ln\, \frac{b}{a} \ = \ (C - D)\, ln\, \frac{b}{a}$$