# 高等数学B（下）：期末考试

---

说明：答题一律写在答题纸上，写在此页上无效。

1. （10分）设$u_{2n-1}=\frac{1}{n}$,$u_{2n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx\ (n=1,2,...)$,判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$的收敛性。

2. （10分）求积分
$$\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}\sin mxdx,$$
其中$\alpha>0,\beta>0,m\neq 0.$

3. （10分）设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$为正项级数，并且有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=b$。
(1) 证明：当$b>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.
(2) $b$取何值时，级数一定发散？

4. （10分）求函数项级数的收敛区间和收敛域
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot\ln n};\qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n})x^n.$$

5. （10分）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}(0<x<\pi)$ 的敛散性.

6. （10分）判断下列广义积分的收敛性：
1) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx;$
2) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx.$

7. （10分）计算$I(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos 2xtdt.$

8. （15分）设$f(x)$为以$2\pi$为周期，且在$[-\pi,\pi]$上可积的函数. $a_n,b_n$是$f(x)$ 的Fourier 系数。
1)试求延迟函数$f(x+t)$的Fourier系数;
2)若$f$连续，$[-\pi,\pi]$ 上分段光滑，试求卷积函数
$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)dt$$
的Fourier展式，并由此推出 Parseval 等式.

9. （15分）(1) 把$f(x)=x^2$在$(-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数
(2) 利用(1)的结论证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$
(3) 利用Parseval等式计算：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$