高数 B

4.9

Green公式

$$\oint_{L^+} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

例1 计算两个积分

$$I_i = \oint_{L_i} \frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{-x}{x^2+y^2}\,dy \quad , \quad i = 1, 2.$$

其中 L_1 是单位圆上由 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 所在劣弧确定的弓形的边界. L_2 是圆的边界, 均考虑逆时针方向.

解. $I_1 = 0$.

$$I_2 = \oint_{L_2} y\,dx - x\,dy \overset{\text{Green公式}}{=} -\iint_{D_2} 2\,dxdy = -2\pi.$$

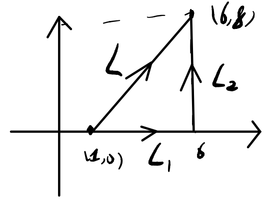
积分与路径无关

例2 计算 $I = \int_L \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, 其中 L 是从 $(1,0)$ 为起点, $(6,8)$ 为终点的直线.

解. 法一. 注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

于是 I 与路径无关.



$$I = \int_{L_1} + \int_{L_2}$$

$$= \int_1^6 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^8 \frac{y}{6^2+y^2}\,dy$$

$$= \ln 6 + \frac{1}{2}\ln(6^2+y^2)\Big|_0^8$$

$$= \ln 10.$$

法二. 被积函数原函数为 $u=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, 即

$$du = \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}$$

于是

$$I = \int_L \frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = \ln 10.$$

$\boxed{\text{推广}}$

例3. 求证: $\oint_L u\cos(\vec{n},x) + v\cos(\vec{n},y)\,ds = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy.$

其中 $\vec{n}$ 是边界 L 的单位外法向量.

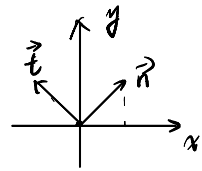
证明. 由 Green 公式得

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L (-v)\,dx + u\,dy = \oint_L (-v,u)\cdot\vec{\tau}\,ds.$$

其中 $\vec{t}$ 是 L 的单位切向量. 注意到 $\vec{n}\cdot\vec{t}=0$. 于是

$$\vec{t}=\left(\cos\left((\vec{n},x)+\frac{\pi}{2}\right),\ \cos\left((\vec{n},y)+\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left(-\cos(\vec{n},y),\ \cos(\vec{n},x)\right)$$

因此,



$$\iint_D\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=\oint_L(-v,u)\cdot\left(-\cos(\vec{n},y),\ \cos(\vec{n},x)\right)ds$$

$$=\oint_L u\cos(\vec{n},x)+v\cos(\vec{n},y)\,ds.$$

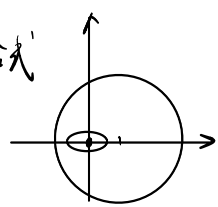
• <u>散度</u>. $\vec{F}=(u,v)$.

$$\operatorname{div}\vec{F}=\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$\boxed{\text{综合应用}}$

<u>例4</u> 计算 $I=\int_L\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$, 其中 L 是圆周 $(x-1)^2+y^2=2$ 逆时针

<u>解</u> 记 $C_\varepsilon=\{(x,y):\ 4x^2+y^2\le\varepsilon\}$. 于是由Green公式



$$0=\oint_{\partial(C\setminus C_\varepsilon)^+}Pdx+Qdy=\oint_L+\oint_{\partial C_\varepsilon^-}$$

于是

$$\oint_L Pdx+Qdy=\oint_{\partial C_\varepsilon^+}Pdx+Qdy$$

即

$$I = \oint_{\partial C_\varepsilon^+} \frac{xdy - ydx}{4x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon} \oint_{\partial C_\varepsilon^+} xdy - ydx$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \iint_{C_\varepsilon} 2\, dxdy = \frac{2\pi\varepsilon}{2\varepsilon} = \pi.$$

例5. 计算 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$，其中 L 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 逆时针.

解. 记 $C = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\}$. 则类似例4得

$$\oint_L Pdx + Qdy = \oint_{\partial C^+} Pdx + Qdy$$

于是

$$I = \oint_{\partial C^+} \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = \oint_{\partial C^+} xdy - ydx$$

$$= 2 \iint_C dxdy = 2\pi.$$

曲面积分

- Gauss 公式.

$$\iint_{S^+} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz.$$

其中 $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ 称为散度.

• $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\, dxdydz$

• Stokes 公式.

$$\oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

延伸. 统一形式. (统称 stokes 公式).

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

例6. 定义 Laplace 算子

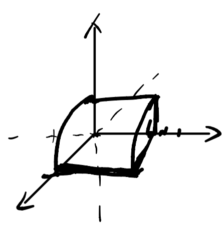
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (= \operatorname{div} \nabla f).$$

求证:

(1) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dS = \iiint_\Omega \Delta u\, dV.$

(2) $\iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \oint_S \left(u\frac{\partial v}{\partial \vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right) dS$ (第二 Green 公式)

例7. 设 S 是曲面 $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+z^2=1,\ x\geq 0,\ z\geq 0,\ 0\leq y\leq 1\}$. 求第一型曲面积分 $\iint_S x\, dS$.



解. $z=\sqrt{1-x^2}$

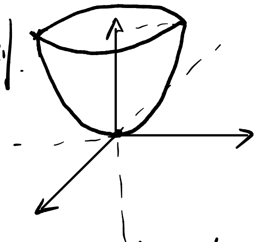
$$I = \iint_S x\, dS = \iint_D x\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\; dxdy$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sqrt{1-x^2}\,\Big|_0^1 = 1.$$

<u>例8</u> 计算 $I = \iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$，其中S是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $z=4$ 截出的有限部分，积分方向为外侧。

<u>解</u> 记 $\tilde{S} = \{(x,y,z):\ z=4,\ x^2+y^2=4\}$ 取上侧。



则由Gauss公式知

$$\iint_{S\cup\tilde{S}} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iiint_{x^2+y^2\le z\le 4} 3\,dxdydz$$

$$= 3\int_0^4 \int_{x^2+y^2\le z} 1\,dxdy\,dz = 3\int_0^4 \pi z\,dz = \frac{3}{2}\pi z^2\Big|_0^4$$

$$= 24\pi.$$

注意到

$$\iint_{\tilde{S}} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \iint_{x^2+y^2\le 4} 4\,dxdy = 4\cdot 4\pi = 16\pi$$

故 $I = 24\pi - 16\pi = 8\pi$.

常微分方程

- 一阶线性微分方程

$$y' + p(x)y = Q(x)$$

通解

$$y(x) = \left[\int Q(x) e^{\int p\,dx} dx + C \right] e^{-\int p\,dx}.$$

- 二阶常系数线性齐次方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

特征方程： $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

- $\lambda_1 = \lambda_2$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$$

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha \pm i\beta$.

$$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x).$$

非齐次 （待定系数法）.

- $f(x) = Ae^{\alpha x}$ ① α 不是根 ② α 单根 ③ α 重根.

① $ae^{\alpha x}$ ② $axe^{\alpha x}$ ③ $ax^2e^{\alpha x}$

- $f(x)=P_n(x)$ $\quad Q_n(x)$ $\quad xQ_n(x)$ $\quad x^2Q_n(x)$.

- $f(x)=A\sin\beta x+B\cos\beta x$. $\quad a\cos\beta x+b\sin\beta x$. $\quad x(a\cos\beta x+b\sin\beta x)$.

例1. 设 $y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上满足 $y'+a(x)y\le 0$，证明：

$$y(x)\le y(0)e^{-\int_0^x a(s)ds} \quad \forall x\ge 0.$$

证明. 令 $F(x)=y(x)e^{\int_0^x a(s)ds}$. 则 知

$$F'(x)=(y'+a(x)y)e^{\int_0^x a(s)ds}\le 0$$

故 $F(x)\le F(0)=y(0)$.

例2. 求常微分方程特解 $y'=xy+3x+2y+6$.

解. $y'=(x+2)y+3(x+2)=(x+2)(y+3)$.

- 最简单特解：$y=-3$.
- 更一般点特解.

$$\frac{y'}{y+3}=x+2$$

$$\ln|y+3| = \frac{1}{2}x^2+2x+C$$

$$|y+3| = Ce^{\frac{1}{2}x^2+2x}.$$

例3. 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的有界函数，求方程 $y'+y=f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上所有的有界解.

解. 由通解公式得

$$y(x) = \left[\int f(x)e^x dx + C\right]e^{-x}$$

$$= e^{-x}\int_c^x f(t)e^t dt,$$

由于 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界，故 $\exists M>0$, s.t. $|f(x)|\le M$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

故

$$\left|\int_c^x f(t)e^t dt\right| \le M\int_c^x e^t dt \le M(e^x-e^c)$$

于是知只需找到 c 使得 $y(x)$ 在靠近 $-\infty$ 有界. 注意到

$$\left|\int_c^x f(t)e^t dt\right| \le \max_{x\in\mathbb{R}}|y(x)|\, e^x \to 0,\quad x\to-\infty.$$

所以知 $\int_{-\infty}^x f(t)e^t dt$, $\forall x\in\mathbb{R}$ 存在. 于是得

$$y(x) = e^{-x}\int_c^x f(t)e^t dt = e^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)e^t dt$$

$$- e^{-x}\int_{-\infty}^c f(t)e^t dt.$$

而

$$\left|e^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)e^t dt\right| \le Me^{-x}e^x = M.$$

所以该方程的所有有界解为 $y = e^{-x}\int_{-\infty}^x f(t)e^t dt$.

<u>例4</u>. 求二阶常微分方程 $y''+4y'=\sin 3x$ 的通解.

解 $\lambda^2+4=0$ 的两个根为 $\pm 2i$. 于是 $y''+4y'=0$ 通解

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

设 $y(x) = a\sin 3x$ 为一个特解. 则

$$(a\sin 3x)'' + 4(a\sin 3x) = \sin 3x$$

$$-9a+4a = 1$$

$$a = -\frac{1}{5}.$$

故通解为

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x.$$