高数 B

5.14

一般项级数

- 绝对收敛和条件收敛

如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则称为绝对收敛。如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 不收敛，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则称为条件收敛。

- 重排：如果级数绝对收敛，那么重排以后依然绝对收敛

- Leibniz 判别法：如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ 以及 $\{a_n\}$ 单调下降，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛。

注：单调性很重要。例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 不收敛。

- Dirichlet 判别法：设 $\{a_n\}$ 单调下降且趋于 0，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和序列有界，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

- Abel 判别法：设 $\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛。

例 1 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$，$p>0$ 的敛散性。

解. 由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|,\quad \left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \le \frac{1}{n^p}.$$

所以 $p>1$ 时. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 绝对收敛.

现考察 $0<p\le 1$ 时. 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx\sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right].$$

于是

$$\sum_{k=1}^{n}\sin kx = \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\quad (x\ne 2m\pi).$$

同理

$$\sum_{k=1}^{n}\cos kx = \left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|},\quad (x\ne 2m\pi).$$

又 $p>0$ 时, $\frac{1}{n^p}$ 单调递减趋近于 0, 所以由 Dirichlet 判别法知 $p>0$, $x\ne 2m\pi$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 收敛. 又注意到当 $0<p\le 1$ 时, 有

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \ge \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p}-\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|$ 发散. 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 条件收敛. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 类似可得也条件收敛.

当 $x=2m\pi$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}=0$ 绝对收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ $(0<p\leq 1)$ 发散.

<u>例2</u>. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛

<u>证明</u>. (利用阿贝尔变换).

记 $A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$, $a_0=0$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_kb_k &= \sum_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}A_kb_k-\sum_{k=1}^{n}A_{k-1}b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}A_kb_k-\sum_{k=0}^{n-1}A_kb_{k+1}. \\ &= \sum_{k=1}^{n}A_k(b_k-b_{k+1})-A_nb_{n+1}.\end{aligned}$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 于是 $\lim_{n\to\infty}A_n$ 存在, 且 $|A_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛, 故

$$b_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}b_{k+1}-b_k+b_1$$

收敛.

于是便知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例3 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛性，其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

解. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 不绝对收敛. 记

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2-1}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{2n}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left(1 - \frac{k}{n^2} + O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((2n+1) - \frac{2n+1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

又

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) > 0, \quad \text{充分大 } n.$$

所以由 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

$\boxed{\text{练习}}$ 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ 条件收敛. (提示: 和上述例子类似).

例4 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n}) a_n$ 也发散.

证明. 反证. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n}) a_n$ 收敛. 记 $b_n = (1+\frac{1}{n}) a_n$. 则

$$a_n = \frac{n}{n+1} b_n.$$

经总到 $\{\frac{n}{n+1}\}$ 单调递增且有上界 1，故由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，矛盾.

例 5 设 $\{a_n\}$ 是单调上升有界正值数列，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ 收敛.

证明 由于 $\{a_n\}$ 单调上升且有界，故知 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在. 经总到

$$1-\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \leq \frac{1}{a_1}\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n - a_1}{a_1} \quad \text{收敛.}$$

练习 设 $\{a_n\}$ 是单调上升的正值序列.

(1) 求证：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^2}$ 收敛.

(2) 求证：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}$ 收敛的充要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

提示. (1) $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^2} \leq \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$.

(2) 充分性已证. 必要性只需注意到 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n} \geq \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{x}$.

例 6. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛. 求证: 当 $x>x_0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x}}$ 收敛.

证明. 注意到

$$\frac{a_n}{n^x} = \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$$

且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 单调递减有界, 故由 Abel 判别法 便知结论.

$\boxed{\text{练习}}$ 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}) \frac{\sin n}{n}$ 敛散性.

提示. 方法一. 注意到 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1),\ n\to\infty$ ← Euler 常数

方法二. 证明 $(1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n})\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0.

$\boxed{\text{幂级数}}$

- 收敛半径, 收敛区间与收敛域

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

对于每一个幂级数都存在一个非负数 R (包括 $+\infty$) 满足

① $|x-x_0|<R$, 幂级数绝对收敛.

② $|x-x_0|>R$, 幂级数发散.

③ $|x-x_0|=R$, 可能收敛也可能发散.

上述 R 称为收敛半径. (x_0-R, x_0+R) 称为收敛区间.

- R 的求法.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad 或 \quad R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

- 性质.

设
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R_1.$$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad |x| < R_2.$$

则 在 $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ 有

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n.$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right) x^n$$

在 $|x| < R_1$ 有

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m} n(n-1)\cdots(n-m+1)\, a_n x^{n-m}.$$

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

注: 它们的收敛半径为 R_1.

若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1^n$ 收敛, 则

$$\lim_{x\to R_1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R_1^n.$$

例1. 计算数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{n+1}}$

解. 令

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}x^n,\quad |x|<1.$$

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'$$

$$=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

所以有

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{n+1}}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

例2. 求幂级数 $x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\times3}{2\times4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots$ 的收敛半径和收敛域.

解. 将 x 看作取定的一个数, 原幂级数便是数项级数.

注意到此级数通项为

$$x+\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n+1)}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}|x^2| = x^2$$

故当 $|x|<1$ 时级数绝对收敛，$|x|>1$ 时级数发散。

便知 $R=1$。又当 $|x|=1$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{2n+1} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{\frac{3}{2}}} \text{ 收敛.}$$

所以收敛域为 $[-1,1]$.

例3. 求 $f(x)=\sin^3 x$ 在 $x=0$ 的 Taylor 级数.

解. 注意到

$$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$$

于是

$$f(x)=\sin^3 x = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}(3x)^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(3+3^{2n-1})}{4\cdot(2n-1)!}x^{2n-1}.$$

练习 求 $f(x)=\cos^3 x$ 在 $x=0$ 处的 Taylor 级数.

提示. $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$.

例4. 求函数 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$ 的麦克劳林级数.

解. 方法一.

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^{2n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x^2)^n$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^{2n}.$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{4n+2}. \qquad |x|<1.$$

方法二. 逐项求导

$$\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)'=\left(\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{2}\ln(1-x)\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)$$

$$=\frac{1}{1-x^2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}, \qquad |x|<1.$$

于是

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}, \qquad |x|<1.$$

代入 x^2 得

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{4n+2}, \qquad |x|<1.$$

例5 求 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的显式表达式.

解 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}-\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\right)x^{2n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^{2n},\quad |x|\le 1.$$

又

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2},\quad |x|<1$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}x^{2n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{x}{1+x^2},\quad |x|<1.$$

知

$$S(x)=2x\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad |x|<1.$$

注意到 $x=\pm1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 收敛. 故由Abel定理知 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 连续. 故

$$S(x)=2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad |x|\le 1.$$

例6. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径是正实数，求证：幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛半径为 $+\infty$.

证明. 取 a 为小于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛半径的正实数，于是知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n a^n$ 绝对收敛. 又对于 $\forall x \in \mathbb{R}$，有

$$\frac{a_n}{n!} x^n = a_n a^n \cdot \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{a}\right)^n.$$

注意到 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{a}\right)^n = 0$. 于是对于足够大的 n 有

$$\left| \frac{a_n}{n!} x^n \right| \le |a_n| a^n$$

故 $\forall x \in \mathbb{R}$，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 都绝对收敛，故收敛半径为 $+\infty$.

$\boxed{\text{练习}}$ 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R，证明幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 在 $(-R, R)$ 内闭一致收敛.

提示. $\forall [-M, M] \subset (-R, R)$，取 $M < a < R$，知

$$|n a_n x^{n-1}| = \left| a_n a^n \cdot n \left(\frac{x}{a}\right)^n \right|$$

$$\le |a_n| a^n \cdot n \cdot \left(\frac{M}{a}\right)^n$$

再利用 $\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{M}{a}\right)^n = 0$ 便得一致收敛性.