5.28

函数项级数和它的收敛域

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 称为函数项级数．如果 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称 x_0 为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 的收敛点．所有收敛点构成的集合称为它的收敛域．

- 常用的方法

① 用比值或根值判别法求

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \rho(x) \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \rho(x),$$

然后解 $\rho(x) < 1$．再解 $\rho(x) = 1$．

② 作变量替换转化为幂级数．

③ 用其它数项级数判别法．

函数项级数的一致收敛性与判别法

- 定义

设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上每一点都收敛到 $f(x)$．若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall x\in I.$$

则称序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛到 $f(x)$．

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$. 若该级数的部分和序列 $S_n(x)$ 在 I 上一致收敛到 $S(x)$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

- <u>判别法</u>.

<u>魏尔斯特拉斯 (M 判别法)</u>. 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上满足:

① $|u_n(x)|\le a_n$, ② $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 一致收敛.

<u>柯西准则</u>. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛的充要条件是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n>N$, $\forall p\in\mathbb{N}$, 有

$$|u_{n+p}(x)-u_n(x)|<\varepsilon,\quad \forall x\in I.$$

<u>狄里克雷判别法</u>. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 满足:

(1) 序列 $\{a_n(x)\}$ 单调递减且 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛到 0.

(2) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的部分和 $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}b_k(x)$ 在 I 上一致有界.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛.

<u>阿贝尔判别法</u>. 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)$ 满足:

(1) $\{a_n(x)\}$ 单调且 $\{a_n(x)\}$ 在 I 上一致有界.

(2) 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

$\boxed{\text{函数项级数和函数的性质}}$

(1) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 中的每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛. 则 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，即

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x_0).$$

(2) 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 中每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛，则 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可积. 即

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

(3) 设函数项级数在 $[a,b]$ 上点点收敛，每一项 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的导数，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 一致收敛. 则 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x).$$

注. (3) 的条件可减弱为 $\exists\, x_0 \in [a,b]$，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，$u_n(x)$ 可导，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 一致收敛.

例1. 利用M判别法证明下列级数在指定区间上一致收敛.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $x \in (0,+\infty)$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n^2 \ln n}\right)$, $x \in [0,1]$

解. (1) 法1.

$$(x^2 e^{-nx})' = 2x e^{-nx} - n x^2 e^{-nx} = (2-nx) x e^{-nx}.$$

则

$$0 < x^2 e^{-nx} \le \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-n\cdot\frac{2}{n}} = \frac{4e^{-2}}{n^2}, \quad x \in (0,+\infty).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4e^{-2}}{n^2}$ 收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

法2. 因为 $f(z) = z^2 e^{-z}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续, 且 $\lim_{z\to+\infty} f(z) = 0$, 故知 $f(z)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界. 于是 $\exists\ M>0$, s.t.

$$0 \le f(z) = z^2 e^{-z} \le M.$$

则

$$0 < x^2 e^{-nx} = n^2 x^2 e^{-nx} \cdot \frac{1}{n^2} \le \frac{M}{n^2}, \quad \forall x \in (0,+\infty).$$

故由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ 收敛, 知 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 一致收敛.

(2) 法1. 由

$$0 < \ln(1+t) < t$$

得

$$0 \le \ln\left(1+\frac{x}{n^2\ln n}\right) \le \frac{x}{n^2\ln n} \le \frac{1}{n^2\ln n}, \quad \forall x \in [0,1].$$

故由 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2\ln n}$ 收敛，知 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n^2\ln n}\right)$ 一致收敛。

法2. 类似于(1)法2. 考虑 $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z}$，证明 $f(z) \le M$，$0<z<\infty$。细节留给读者。

例2 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$，$x \in [0,+\infty)$ 一致收敛。

证明 法一. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 一致收敛（与 x 无关，收敛便是一致收敛）

$$0 < \sqrt{\frac{n+1}{n+x}} \le \sqrt{\frac{n+1}{n}} \le 2, \text{ 对 } x \in [0,+\infty) \text{ 一致有界.}$$

又

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t+1}{t+x}\right) = \frac{x-1}{(t+x)^2},$$

因此，对于给定 $x \in [0,+\infty)$，$\sqrt{\frac{n+1}{n+x}}$ 对 n 单调，所以由阿贝尔判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 一致收敛。

法二. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 一致有界。

$$0 < \sqrt{\frac{n+1}{n(n+x)}} \le \sqrt{\frac{n+1}{n^2}} \to 0, \quad n\to\infty, \quad \forall x \in [0,+\infty).$$

又

$$\sqrt{\frac{n+1}{n(n+x)}}=\sqrt{\frac{1}{n+x}+\frac{1}{n(n+x)}}$$

对 n 单调递减，所以，由狄里克雷判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+x)}}$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛。

例3. 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$，$x\in[0,+\infty)$。求证：

(1) $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续。

(2) $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 可逐项求导，且 $f'(x)$ 连续。

证明. (1) $u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，又

$$0<u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}\le\frac{1}{1+n^2},\quad\forall x\in[0,+\infty).$$

故知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致收敛，所以和 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

(2) 已证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 对 $x\in[0,+\infty)$ 收敛，通项 $u_n(x)=\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$ 具有连续的导数，又对于 $\forall\delta>0$，当 $x\in[\delta,+\infty)$ 有

$$|u_n'(x)|=\left|\frac{ne^{-nx}}{1+n^2}\right|\le\frac{n}{1+n^2}e^{-n\delta}\le(e^{-\delta})^n.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-\delta})^n$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 一致收敛

于是 $f(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 有连续的导数，且

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-ne^{-nx}}{1+n^2}.$$

由 $\delta>0$ 的任意性，知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有连续的导数.

例4. 求证：函数项级数 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 不一致收敛.

证明. 法一.

$$\left(\frac{x}{(1+x)^n}\right)' = \frac{(1+x)^n - nx(1+x)^{n-1}}{(1+x)^{2n}} = \frac{1-(n-1)x}{(1+x)^{n+1}}$$

于是

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} u_n(x) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{x}{(1+x)^n} = \frac{\frac{1}{n-1}}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n}$$

因为 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \infty$，故知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ 在 $\mathbb{R}$ 不一致收敛.

法二. 注意到

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

故 $S(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，但 $\frac{x}{(1+x)^n}$ 连续，故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n}$ 不可能一致收敛.

$\boxed{\text{练习}}$ 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $f(1)=0$，请用一致收敛的定义证明 $f_n(x)=x^n f(x)$ 一致收敛。

提示. $\forall x\in[0,1]$，$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. 由 $f(x)\in C[0,1]$，知 $\exists M>0$, s.t. $|f(x)|\le M$. 又 $f(1)=0$ 知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, s.t. $\forall x\in(1-\delta,1]$, $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\delta)^n=0$，故对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}$，$\forall n>N$，有

$$|(1-\delta)^n|<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]}|x^n f(x)| \le \sup_{x\in[0,1-\delta]}|x^n f(x)| + \sup_{x\in[1-\delta,1]}|x^n f(x)|$$

$$\le (1-\delta)^n M + \sup_{x\in[1-\delta,1]}|f(x)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\boxed{\text{广义积分}}$

- 无穷积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{或} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

- 瑕积分

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad f(x)\text{在}(b-\eta,b)\text{上无界}.$$

- 几个特殊的积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,dx\ \begin{cases} p>1 & 收敛 \\ p\le 1 & 发散. \end{cases}\qquad \int_0^{1}\frac{1}{x^p}\,dx\ \begin{cases} p<1 & 收敛 \\ p\ge 1 & 发散. \end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$ （试记此式）

- 比较判别法（类似于级数）

$f(x),\ g(x)\ge 0.$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\in(0,+\infty)$

则 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 与 $\int_1^{+\infty}g(x)\,dx$ 同敛散.（瑕积分类似）.

- 绝对收敛与条件收敛

狄里克雷判别法　　阿贝尔判别法

例1. 如果无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛且 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明. 不妨设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递减且 $f(x)\ge 0$. 于是由 $\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\forall x_2>x_1>X$, 有

$$0\le f(x_2)\le\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

注. 若 $f(x)$ 不是单调的, 则上述结论不对. 例如

$$f(x)=\begin{cases} n^2\left(x-n+\frac{1}{n^2}\right), & x\in\left[n-\frac{1}{n^2}, n\right] \\ -n^2\left(x-n-\frac{1}{n^2}\right), & x\in\left(n, n+\frac{1}{n^2}\right] \\ 0, & \text{other}. \end{cases}$$

例12 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx\ (p>0)$ 的敛散性.

解. 注意到

$$\left|\frac{\sin x}{x^p}\right|\le\frac{1}{x^p}$$

又 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$ 在 $p>1$ 时收敛, 故 $p>1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 绝对收敛.

当 $0<p\le1$ 时, 对任意 $A>1$ 有

$$\left|\int_1^A \sin x\,dx\right| = |\cos A-\cos 1|\le 2,$$

即 $\left|\int_1^A \sin x\,dx\right|$ 有界. 又 $\frac{1}{x^p}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减趋近于 0,

故由狄里克雷判别法知 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 收敛. 下证当 $0<p\le1$ 时, $\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}dx$ 发散.

注意到对于 $\forall x$, 有 $|\sin x|\ge\sin^2 x$. 于是

$$\frac{|\sin x|}{x^p} \geq \frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{2x^p} - \frac{\cos 2x}{2x^p}.$$

由于 $0<p\leq 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^p}$ 发散，$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$ 收敛（类似前面）

故知 $\int_1^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^p} dx$ 发散，则 $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^p} dx$ 发散.

综上，当 $0<p\leq 1$ 时，$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 条件收敛.

例12. 对一切 $x\in(0,+\infty)$，定义变上限积分 $F(x)=\int_0^x \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\, dt$.

(1) 证明 $\forall x\in(0,+\infty)$，$F(x)$ 均收敛.

(2) 补充定义 $F(0)=0$，讨论 $F(x)$ 在 $x=0$ 是否可导.

(1) 证明. 取 $a(t)=t$，$b(t)=\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}$，则

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}\, dt\right| = \left|\cos\frac{1}{x_1} - \cos\frac{1}{x_2}\right| \leq 2.$$

(2) 注意到

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}\, dt &= t\cos\frac{1}{t}\Big|_0^x - \int_0^x \cos\frac{1}{t}\, dt \\
&= x\cos\frac{1}{x} - \int_0^x \cos\frac{1}{t}\, dt \\
&= x\cos\frac{1}{x} - \left[(-t^2\sin\frac{1}{t})\Big|_0^x + 2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\, dt\right] \\
&= x\cos\frac{1}{x} + x^2\sin\frac{1}{x} - 2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\, dt.
\end{aligned}$$

故知 $F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $f(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在且有限，$a, b>0$. 证明：

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}.$$

证明.

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0}} \int_r^R \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0}} \left[\int_r^R \frac{f(ax)}{x}\,dx - \int_r^R \frac{f(bx)}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0}} \left[\int_{ar}^{aR} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{br}^{bR} \frac{f(x)}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0}} \left[\int_{ar}^{br} \frac{f(x)}{x}\,dx - \int_{aR}^{bR} \frac{f(x)}{x}\,dx\right]$$

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ r\to 0}} \left[f(\xi_1)\int_{ar}^{br} \frac{1}{x}\,dx - f(\xi_2)\int_{aR}^{bR} \frac{1}{x}\,dx\right]$$

$$= [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.$$

$\boxed{\text{练习}}$ 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续，且 $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$ 收敛，$a,b>0$，证明：

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

提示：类似于例3.

例4. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$，$p>0$.

解. 注意到

$$\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} \overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=} \int_1^{+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{t^2})(1+\frac{1}{t^p})}\cdot\frac{1}{t^2}dt$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{t^p}{(1+t^2)(1+t^p)}dt$$

于是便知

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} = \int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)} + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{x^p}{(1+x^2)(1+x^p)}dx + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^p)}$$

$$= \int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

$\boxed{\text{练习}}$. 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$.

提示. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx \xlongequal{x=\frac{1}{t}} \int_1^{+\infty} \frac{\ln\frac{1}{t}}{1+\frac{1}{t^2}} \frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{-\ln t}{1+t^2}\,dt$.

例5. 设 $\alpha>2$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 可导, 且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f'(x)=-1$. 求证: $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛.

证明. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f'(x)=-1$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, 所以可不妨假设 $f(x)$ 单调递减且 $f(x)\geq 0$. 又

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{-\alpha+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{(-\alpha+1)x^{-\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} (-\alpha+1)x^\alpha f'(x) = \alpha-1$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}}\,dx$ 收敛, 所以由比较判别法知收敛.

$\boxed{\text{练习}}$ (1) 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 一致连续且 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

(2) 设 $f(x)$ 连续可微, 积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ 和 $\int_1^{+\infty} f'(x)\,dx$ 都收敛, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

提示. (1) 反证再利用 Cauchy 准则. (2) 先证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在, 再证其为0.