高数 B

6.11

Fourier 级数

- f 是以 2π 为周期的可积函数，则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

其中，

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \quad n=1,2,\cdots$$

- 正弦级数、余弦级数

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为奇函数，则

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 为偶函数，则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

- 任意周期的 Fourier 级数

$f(x)$ 以 $2l$ 为周期，则

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x,$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad n=1,2,\cdots$$

- <u>收敛性</u>

<u>定理</u>. $f(x)$ 是 2π 周期的函数，如果 $f(x)$ 满足下述条件之一：

1. 狄里克雷条件：$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 分段连续且分段单调.
2. $f(x)$ 分段可导.

则 $f(x)$ 的 Fourier 级数逐点收敛到 $S(x)=\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

- <u>Fourier 系数的性质</u>

<u>Parseval 公式</u>：$f(x)$ 是 2π 周期函数，且在 $[-\pi,\pi]$ 有界可积，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx.$$

<u>例1</u>. $f(x)$ 是以 2π 为周期的二次可导函数，设 $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

证明 Fourier 级数一致收敛.

证明. 由 Fourier 系数定义知

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

由于 f 可导. 故由分部积分得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{n^2\pi} f'(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos nx\,dx.$$

注意到 f'' 在 $[-\pi,\pi]$ 上可导. 故 f'' 在 $[-\pi,\pi]$ 上有界, 即 $|f''(x)|\le M$.

$$|a_n| \le \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)\cos nx|\,dx \le \frac{2M}{n^2}.$$

同理可得

$$|b_n| \le \frac{2M}{n^2}.$$

于是

$$|a_n\cos nx + b_n\sin nx| \le |a_n| + |b_n| \le \frac{4M}{n^2},$$

从而一致收敛.

例2. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，且在 $[0,2]$ 上有

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 1< x\le 2. \end{cases}$$

求 Fourier 级数，并利用此结果证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

解.

$$a_0=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}.$$

$$a_n=\int_0^2 f(x)\cos(n\pi x)\,dx=\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin(n\pi x)\Big|_0^1-\frac{1}{n\pi}\int_0^1\sin(n\pi x)\,dx$$

$$=\frac{1}{(n\pi)^2}\cos(n\pi x)\Big|_0^1=\frac{1}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right],\quad n=1,2,\cdots$$

$$b_n=\int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)\,dx=\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos(n\pi x)\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos(n\pi x)\,dx$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{n\pi},\quad n=1,2,\ldots$$

于是便知

$$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}+(-1)^n\frac{\pi}{2n}\sin(n\pi x)\right],\quad x\in[0,2],\ x\neq 1.$$

而 $x=1$ 时，该级数收敛到 $1/2$.

在上式中令 $x=0$ 有

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=0,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

记 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，则

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{2^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}S,$$

得

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

练习 利用 $x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cos nx}{n^2}-\frac{4\pi\sin nx}{n}\right)$ 在 $(0,2\pi)$ 成立计算数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

提示 利用 Parseval 公式以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^4\,dx=\frac{32\pi^4}{9}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}+16\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\qquad\left(\frac{\pi^4}{90}\right).$$

期末复习

例1. 设 $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数，$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上等于 e^x。求 $f(x)$ 的 Fourier 级数，以及此级数在 $x=\pi$ 处的值。

解. 由定义知

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi} e^x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi}n\int_{-\pi}^{\pi} e^x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi}) + \frac{1}{\pi}ne^x\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}n^2\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}(e^{\pi}-e^{-\pi}) - n^2 a_n$$

则

$$a_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \quad \text{同理得}\quad b_n = \frac{(-1)^{n-1}n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}$$

于是

$$f(x) = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}\sin nx\right),\quad x\in(-\pi,\pi)$$

当 $x=\pi$ 时，该级数收敛到 $\dfrac{e^{\pi}+e^{-\pi}}{2}$。

例2. 求无穷积分 $\int_0^{+\infty}\sqrt{x^3}e^{-x}dx$ 和瑕积分 $\int_0^1\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\,dx$ 的值。

解.

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x^3}e^{-x}dx = \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = \tfrac{3}{2}\times\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^1\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\,dx = B\left(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3)} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}}{2} = \frac{3}{8}\pi.$$

例3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ 的收敛区间，以及和函数.

解. $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}=1$. 又 $x=\pm1$ 时显然不收敛.

故收敛区间为 $(-1,1)$.

注意到

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}\right)''=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''$$

$$=\frac{2}{(1-x)^3}.$$

例4. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛，但对于任意给定 $r>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $[r,+\infty)$ 上一致收敛.

证明. 由于

$$\sup_{x\in(0,+\infty)}|n^2e^{-nx}|\geq n^2e^{-n\cdot\frac{1}{n}}=n^2e^{-1}\not\to0,\quad n\to\infty.$$

故知 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛.

注意到

$$|n^2e^{-nx}|\leq n^2e^{-nr},\quad\forall x\in[r,+\infty)$$

易知 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nr}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$ 在 $[r,+\infty)$ 上一致收敛.

<u>例5.</u> 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x+2n}$$

的收敛域，绝对收敛点 x 的全体，条件收敛点 x 的全体.

解. 当 $x>1$ 时，注意到

$$\left|\frac{(-1)^n}{n^x+2n}\right| \le \frac{1}{n^x}$$

故绝对收敛. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^x+2n} = 2$， $x<1$，故知绝对收敛点 x 的全体为 $(1,+\infty)$.

当 $x\le 1$ 时，注意到

$$2(n+1)+(n+1)^x-(2n+n^x)$$

$$= 2+(n+1)^x-n^x \to 2, \quad n\to\infty.$$

所以对于充分大的 n 有

$$\frac{1}{n^x+2n} - \frac{1}{(n+1)^x+(2n+2)} > 0$$

故由 Dirichlet 判别法知收敛，所以条件收敛点为 $(-\infty,1]$.

例6. 定义函数 $\theta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为

$$\theta(x)=\int_0^x\sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\,dt.$$

证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\cos\theta(x)\,dx$$

收敛.

证明. 由于 $\frac{d\theta}{dx}=\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}>0$, $\forall x\in[0,+\infty)$, 故由反函数定理知存在 $x=x(\theta)$ 满足 $x:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 单调递增且 $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\sqrt{(x(\theta)+1)(x(\theta)+2)(x(\theta)+3)}}>0$.

于是无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\cos\theta(x)\,dx=\int_0^{+\infty}\cos\theta\;x'(\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\theta}{\sqrt{(x(\theta)+1)(x(\theta)+2)(x(\theta)+3)}}\,d\theta.$$

于是由 Dirichlet 判别法知无穷积分收敛.

例7. 设 $n\in\mathbb{N}$.

(1) 任给常数 $a>0$, 证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\, dx$$

在$t\in[a,+\infty)$上一致收敛.

证明. 经总到

$$\frac{1}{(t+x^2)^n} \le \frac{1}{(a+x^2)^n}$$

而 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^n}$ 收敛, 于是依知上述无穷积分一致收敛.

(2) 对于每个 $t\in(0,+\infty)$, 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\, dx.$$

解. 令 $F(t)=\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\, dx$. 由(1)知 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛, 故求导可与积分交换顺序. 于是依知

$$F'(t)=\int_0^{+\infty} \frac{-n}{(t+x^2)^{n+1}}\, dx.$$

$$= -\frac{n}{t}\int_0^{+\infty} \frac{t+x^2-x^2}{(t+x^2)^{n+1}}\, dx$$

$$= -\frac{n}{t}F(t) + \frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \frac{nx^2}{(t+x^2)^{n+1}}\, dx$$

$$= -\frac{n}{t}F(t) + \frac{1}{2t}\cdot \frac{-x}{(t+x^2)^n}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{2t}F(t)$$

$$= \left(\frac{1}{2}-n\right)\frac{F(t)}{t}$$

于是

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{\frac{1}{2}-n}{t}$$

得

$$F(t) = C\, t^{\frac{1}{2}-n}.$$

当 $t=1$ 时.

$$F(1) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \overset{x=\tan y}{=\!=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sec^2 y)^n} \sec^2 y\, dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} y\, dy$$

$$= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}.$$ (Wallis 公式).

则知

$$\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2} = C$$

故得

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\, dt = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\frac{\pi}{2}\, t^{\frac{1}{2}-n}.$$