Cauchy 的例子

例 1. *求函数*

$$f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的 Taylor 级数，并说明它不收敛到 $f(x)$。

我们分步骤用几个引理来求出这个例子的 Taylor 级数。这个例子是 Cauchy 最早给出的，他想要说明的是不是所有的 Taylor 级数都会收敛到函数本身。我们一般把一个可以展开为幂级数的函数称作解析函数，于是可知这里的 $f(x)$ 不是解析函数。这个例子告诉我们，并不是所有的 C^∞ 函数都可以展开成幂级数的形式，这个也就表明光滑函数类比实解析函数类要大一些。

引理 2. *对于 $\forall n\geq 1$，我们有*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x^n}=0.$$

证明. 注意到对于 $y>0$，我们有

$$e^y=1+y+\frac{y^2}{2!}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots\geq\frac{y^n}{n!}.$$

于是，令 $y=1/x^2$ 得到

$$e^{-1/x^2}\geq\frac{1}{n!x^{2n}},$$

即是

$$\left|\frac{e^{-1/x^2}}{x^n}\right|\leq\frac{n!x^{2n}}{|x|^n}=n!|x|^n\to 0,\quad x\to 0.$$

□

引理 3. *对于 $\forall n\geq 1$ 存在次数为 $2(n-1)$ 的多项式 $P_n(x)$ 使得*

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2},\quad x\neq 0.$$

证明. 我们用数学归纳法证明这个引理。当 $n=1$ 时，直接求导可知

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2},$$

满足要求。假设对于任意 n，存在次数为 $2(n-1)$ 的多项式 $P_n(x)$ 使得

$$f^{(n)}(x)=\frac{P_n(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2},\quad x\neq 0.$$

则对上式求导得

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x)&=\frac{P_n'(x)}{x^{3n}}e^{-1/x^2}-\frac{3nP_n(x)}{x^{3n+1}}e^{-1/x^2}+\frac{2P_n(x)}{x^{3n+3}}e^{-1/x^2}\\&=\left(x^3P_n'(x)-3nx^2P_n(x)+2P_n(x)\right)\frac{1}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2}\\&=\frac{P_{n+1}(x)}{x^{3(n+1)}}e^{-1/x^2},\quad x\neq 0,\end{aligned}$$

其中 $P_{n+1}(x)=x^3P_n'(x)-3nx^2P_n(x)+2P_n(x)$ 是一个次数为 $2n$ 的多项式。 □

引理 4. 对于 $\forall n \geq 1$，$f^{(n)}(0) = 0$。

证明. 用数学归纳法。当 $n = 1$ 时，由引理2知

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0.$$

假设对于 $n = k$，有 $f^{(k)}(0) = 0$。则对于 $n = k + 1$，由引理3得

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{P_k(x)}{x^{3k+1}} e^{-1/x^2} = 0. \end{aligned}$$

□

因此，结合上述引理，我们得到 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 Taylor 级数为

$$0 + 0x + \frac{0}{2!}x^2 + \cdots + \frac{0}{n!}x^n + \cdots.$$

所以便知其除了 $x = 0$ 外都不收敛到 $f(x)$。