数学分析 (II) 2022-2023 春季学期期中试题

1. (8 分) 求曲线 $y = 3\int_0^{\frac{x}{3}} \sqrt{\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta, 0 \le x \le 2\pi$ 的弧长。

2. (24 分) 判别下列级数的敛散性。若非正项级数，请讨论绝对和条件收敛性。

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n!}{n^p}$, 其中 $p > 0$;

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{\sin n}{\sqrt{n+1}}$;

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$

3. (10 分) 讨论无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ 的敛散性, 其中 $p, q > 0$ 。

4. (10 分) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 为两个数列, 其中 $a_n > 0\ (n > 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 绝对收敛, 并且满足

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \le 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + b_n, \quad n \ge 2 \text{ 。}$$

   证明: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。

5. (10 分) 讨论下列反常积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的绝对收敛和条件收敛性。

6. (10 分) 证明: 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos nx}{\sum_{k=0}^{2n-1} x^k}$ 在 $(0, 1]$ 上一致收敛。

7. (10 分) 求心形线 $r = 1 + \cos\theta$ 和圆 $r = 1$ 所围图形绕极轴旋转一周所得旋转体侧面积。

8. (8 分) 假设 n 为正整数且 $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^6 \sin^2 x} dx$ 收敛，求 n 的取值。

9. (10 分) 证明: $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ 。