数学分析 (II) 2022-2023 春季学期期末试题

1.（10 分）设 $a>0$, 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$ 的敛散性。

2. (12 分) 求 $[0,\pi]$ 上的函数 $f=x(\pi-x)$ 的正弦级数并求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$ 的和。

3. (12 分) 求函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 在 0 处的幂级数展开式, 并求 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

4. (10 分) 求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$ 。

5.（10 分）讨论反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ （其中 $p\geq 0$）的绝对收敛和条件收敛性。

6. (12 分) 求积分 $\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{2}\right)}{\cos x}, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right],\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

7. (10 分) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\ln\dfrac{|x|}{2\pi}\right)^{-2}+|x|^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{|x|}, & 0<|x|\leq\pi,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论它的 Fourier 级数的收敛性。

8. (12 分) 对 $f\in R[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

定义级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-b_n\cos nx+a_n\sin nx\right).$$

记 $\varphi_x(t)=f(x+t)-f(x-t)$ 。证明: 若在 x 处满足 $\int_0^{\pi}\frac{|\varphi_x(t)|}{t}\,\mathrm{d}t<+\infty$ 收敛, 则上述级数在 x 收敛。

9. (12 分) 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的连续函数, 且 $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=0$ 。设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导函数, 试证明:

(1) 令 $G(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$, 则 G 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;

(2) 令 $a_n=\int_0^1 f(x)g(nx)\,\mathrm{d}x$, 则 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ 收敛。

数学分析 (II) 2022-2023 春季学期期末试题参考答案[1]

作者：汪铃　个人主页：lwmath.github.io

1. (10 分) 设 $a>0$, 讨论 $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$ 的敛散性。

解. 由 Taylor 展开得

$$a^x=1+x\ln a+\frac{x^2}{2}\ln^2 a+o\left(x^2\right),$$

及

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+o\left(x^2\right).$$

则

$$\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\left(\ln a-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{n}+\left(\frac{\ln^2 a}{2}+\frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

所以知当 $\ln a\neq\frac{1}{2}$ 时, 以及 n 充分大后原级数要么是正项级数要么是负项级数, 于是由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散得原级数发散。$\ln a=\frac{1}{2}$, 即 $a=e^{1/2}$ 时, $\sqrt[n]{a}-\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ 与 $\frac{1}{n^2}$ 同阶, 故收敛。 □

2. (12 分) 求 $[0,\pi]$ 上的函数 $f=x(\pi-x)$ 的正弦级数并求 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$ 的和。

解. 将 $f(x)$ 奇延拓至 $[-\pi,0]$, 则知 $a_n=0$, $n=0,1,2,\cdots$.

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x(\pi-x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{\pi}x(\pi-x)\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{2}{n\pi}(\pi-2x)\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_0^{\pi}-2\sin nx\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{4}{n^3\pi}(-\cos nx)\Big|_0^{\pi}\\
&=\frac{4}{n^3\pi}\left[1-(-1)^n\right],\quad n=1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

于是 $f(x)$ 的正弦级数为

$$f(x)\sim\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

[1]作者学识有限，解答如有疏漏，欢迎发送邮件至 lingwang@stu.pku.edu.cn 与我交流。

由 Parseval 等式知

$$\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\ \mathrm{d}x=\frac{\pi^4}{15},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}=\frac{\pi^6}{15\times 64}=\frac{\pi^6}{960}.$$

易知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$ 收敛。则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^6}\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}+\frac{1}{2^6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}\\&=\frac{\pi^6}{960}+\frac{1}{64}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6},\end{aligned}$$

于是便有

$$\frac{63}{64}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{15\times 64},$$

即得

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{15\cdot 64}\cdot\frac{64}{63}=\frac{\pi^6}{945}.$$

□

3. (12 分) 求函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 在 0 处的幂级数展开式, 并求 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

解. 注意到 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}=\arctan 1-\arctan 2x$. 于是

$$f'(x)=-\frac{2}{1+(2x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

则利用逐项积分得

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

又 $f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$，以及由 Leibniz 判别法知 $x=1/2$ 时级数也收敛，故得

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

于是 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}=\dfrac{\pi}{4}-f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$. $\square$

4. (10 分) 求 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n-1}$ 。

解. 令

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}x^{3n-1},\quad x\in(-1,1].$$

利用一致收敛性逐项求导得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{3n-2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^3)^n x^{-2}=-\frac{x}{1+x^3},\quad x\in(-1,1).$$

则积分得

$$\begin{aligned}
S(x)&=\int_0^x -\frac{t}{1+t^3}\ \mathrm{d}t=\frac{1}{3}\int_0^x\left(\frac{1}{t+1}-\frac{t+1}{t^2-t+1}\right)\ \mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{3}\int_0^x\frac{1}{t+1}\ \mathrm{d}t-\frac{1}{6}\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+1}\ \mathrm{d}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right)^2}\ \mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{3}\ln(1+x)-\frac{1}{6}\ln\left(1-x+x^2\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

最后，令 $x\to 1$, 便得到 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n-1}=\dfrac{\ln 2}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$ 。 $\square$

5.（10 分）讨论反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\ \mathrm{d}x$ （其中 $p\geq 0$）的绝对收敛和条件收敛性。

解. 0 不是瑕点, 故原积分等价于考虑 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\ \mathrm{d}x$ 的收敛性。由变量替换知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\ \mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{2t^{\frac{1}{2}}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\ \mathrm{d}t$$

于是易知积分在 $p>1$ 时绝对收敛, $0\leq p\leq 1$ 时条件收敛。 $\square$

6. (12 分) 求积分 $\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\ \mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{2}\right)}{\cos x}, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right],\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$

解. 易证函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 连续。利用 $\ln(1+x)$ 的 Taylor 展开式有

$$\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{2}\right)}{\cos x}=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\cos^n x.$$

注意到

$$\left|(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1}\cos^n x\right|\le\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},\quad\forall x\in[0,\pi].$$

则知函数项级数在 $[0,\pi]$ 上一致收敛, 故可以逐项积分。于是

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{2}\right)}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{2n+1}\right],$$

其中，我们利用了 Wallis 公式

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\cos^n x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}(-1)^n\cos^n x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi/2}[1+(-1)^n]\cos^n x\,\mathrm{d}x\\&=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\pi, & n\text{为偶数},\\ 0, & n\text{为奇数}.\end{cases}\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}(\arcsin x)'&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(-x^2\right)^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad x\in(-1,1).\end{aligned}$$

于是便知

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in(-1,1).$$

即得

$$\int_0^{\pi}\frac{\ln\left(1+\frac{\cos x}{2}\right)}{\cos x}\,\mathrm{d}x=\pi\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{6}$$

□

7. (10 分) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\left(\ln\dfrac{|x|}{2\pi}\right)^{-2}+|x|^{\frac{1}{2}}\sin\dfrac{1}{|x|}, & 0<|x|\le\pi,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论它的 Fourier 级数的收敛性。

解. 在 $x=0$ 处, 我们知存在 $\delta>0$，使得

$$\int_0^{\delta}\frac{1}{t(\ln t)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{\ln\delta}<+\infty,$$

即 Dini 连续。且

$$\left|x^\alpha \sin\frac{1}{|x|}\right| \le |x|^\alpha, \quad \forall |x| \le \pi,$$

即在 $x=0$ 处 $x^\alpha \sin\dfrac{1}{|x|}$ 是 Hölder 连续的，于是由 Lipchitz 判别法知 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=0$ 处收敛到 $f(0)$。又由于 $f(x)$ 在 $x\neq 0$ 时是光滑的，易知 $f(x)$ 的 Fourier 级数收敛。 □

8. (12 分) 对 $f\in R[-\pi,\pi]$ 的 Fourier 级数

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx + b_n \sin nx\right),$$

定义级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-b_n\cos nx + a_n\sin nx\right).$$

记 $\varphi_x(t)=f(x+t)-f(x-t)$ 。证明: 若在 x 处满足 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\,\mathrm{d}t<+\infty$ 收敛，则上述级数在 x 收敛。

证明. 令 $\widetilde{S}_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(-b_k\cos kx + a_k\sin kx\right)$. 计算部分和 $\widetilde{S}_n(x)$ 得

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}\left(-b_k\cos kx + a_k\sin kx\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\ \mathrm{d}t\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\ \mathrm{d}t\sin kx\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\sin kx\cos kt - \cos kx\sin kt)\ \mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\sin k(x-t)\ \mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin\frac{x-t}{2}\sin k(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\ \mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(k-\frac{1}{2})(x-t)-\cos(k+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\ \mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\frac{x-t}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\ \mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\cos\frac{x-t}{2}-\cos n(x-t)\cos\frac{x-t}{2}+\sin n(x-t)\sin\frac{x-t}{2}}{2\sin\frac{x-t}{2}}\ \mathrm{d}t\\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{D}_n(x-t)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\widetilde{D}_n(t)\ \mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\pi}\varphi_x(t)\widetilde{D}_n(t)\ \mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

其中

$$\widetilde{D}_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-\cos nt}{2\tan\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}\sin nt\right).$$

由

$$\int_0^{\pi} \frac{|\varphi_x(t)|}{t}\ \mathrm{d}t < +\infty,$$

以及

$$\int_0^{\pi} \left|\frac{\varphi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}} - \frac{\varphi_x(t)}{t}\right|\ \mathrm{d}t < +\infty,$$

知 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}}\ \mathrm{d}t$ 收敛。于是由 Riemann-Lebesgue 引理知级数收敛。 □

9. (12 分) 设 g 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 1 的连续函数, 且 $\displaystyle\int_0^1 g(x)\ \mathrm{d}x = 0$ 。设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导函数, 试证明:

(1) 令 $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t$, 则 G 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界;

(2) 令 $a_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(nx)\ \mathrm{d}x$, 则 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛。

证明.（1）只需证明 G 是周期为 1 的函数。事实上，我们有

$$G(x+1) = \int_0^{x+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t + \int_x^{x+1} g(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t = G(x).$$

由 g 是 $\mathbb{R}$ 的连续函数知 $G(x)$ 也为 $\mathbb{R}$ 的连续函数，故结合 G 是周期为 1 的函数便得到 $G(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上有界。

（2）由分部积分得

$$a_n = -\frac{1}{n}\int_0^1 f'(x)G(nx)\ \mathrm{d}x.$$

于是由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$a_n^2 \le \frac{1}{n^2}\left(\int_0^1 f'(x)^2\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 G(nx)^2\ \mathrm{d}x\right).$$

由 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，故知其有界, 于是 $\displaystyle\int_0^1 f'(x)^2\ \mathrm{d}x$ 也有界。由 $G(x)$ 为周期为 1 的函数得

$$\int_0^1 G(nx)^2\ \mathrm{d}x \xlongequal{y=nx} \frac{1}{n}\int_0^n G(y)^2\ \mathrm{d}y = \int_0^1 G(x)^2\ \mathrm{d}x.$$

则知 $a_n^2 \le \dfrac{C}{n^2}$，即知级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ 收敛。 □