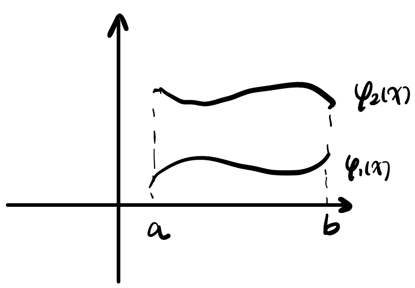
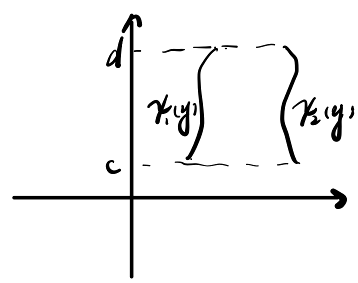
高数B第一次课（3.31）

§1. 重积分

1. 二重积分

- **形式**：$\iint_D f(x,y)\,d\sigma$ 或 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
- **几何意义**：$\iint_D d\sigma$ 表示 D 的面积
- **计算**：（重点是化为累次积分）

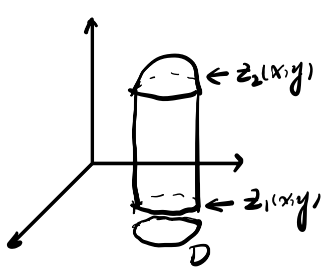


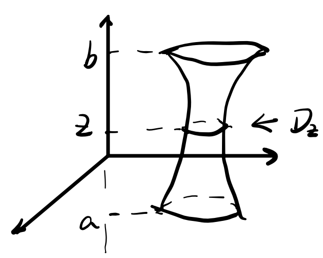


$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

2. 三重积分

- **形式**：$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$ 或 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$
- **几何意义**：$\iiint_\Omega dV$ 表示 Ω 的体积.
- **计算**：





$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dx\,dy = \int_a^b\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz$$

3. 常见的计算方法

- **一般步骤**

(1) 画出积分区域示意图

(2) 选择合适的积分顺序 $\left\{\begin{array}{l}\text{倾向于选择不需要分段的顺序} \\ \text{难积或积分时，及时转变顺序}\end{array}\right.$

(3) 写出相应的累次积分

(4) 计算累次积分

- **提示**：重积分的对称性问题 $\left\{\begin{array}{l}\text{① 区域具有对称性} \\ \text{② 被积函数形式复杂但有对称性}\end{array}\right.$

- **重积分换元**

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(x(\xi,\eta),\, y(\xi,\eta)) \left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right| dxdy$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

极坐标换元

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad r \ge 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

柱坐标换元

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad r \ge 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

球坐标换元

$$\begin{cases} x=\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y=\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z=\rho\cos\varphi \end{cases} \quad \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi],\ \varphi\in[0,\pi].$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dV=\iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta.$$

4. 重积分的应用

- 面积和体积的计算.
- 曲面表面积的计算.

(1) $z=f(x,y)$ $\qquad S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dxdy$.

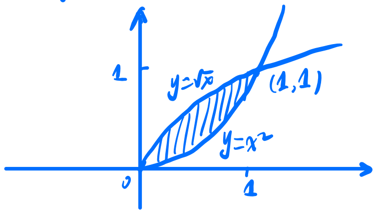
(2) $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$ $\qquad S=\iint_{D'}\sqrt{\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|^2+\left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|^2+\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|^2}\,dudv.$

- 物体的质量.
- 物体的质心
- 转动惯量.

例题

例1. 求 $I=\iint_D(x^2+2y)\,dxdy$, 其中 D 是 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围区域.

解. (画出区域示意图)



(选择积分顺序写出累次积分)

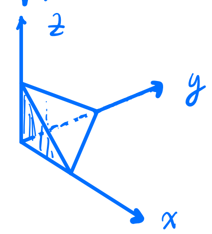
$$I=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(x^2+2y)\,dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(x^2+2y)\,dx\right)dy$$

(计算累次积分)

$$I=\int_0^1 (x^2y+y^2)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx=\int_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+x-2x^4\right)dx=\frac{27}{70}.$$

例12. 求 $I=\iiint_\Omega (1-y)e^{-(1-y-z)^2}dv$，其中 Ω 是平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标平面相交在第一卦限形成的四面体.

解. (画出区域示意图)



(选择合适的积分顺序写出累次积分)

$$I=\iint_{D(y,z)}\left(\int_0^{1-y-z}(1-y)\,e^{-(1-y-z)^2}dx\right)dy\,dz$$

(计算累次积分)

$$I=\iint_{D(y,z)}(1-y)(1-y-z)\,e^{-(1-y-z)^2}dy\,dz$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^{1-y}(1-y)(1-y-z)\,e^{-(1-y-z)^2}dz\right)dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)\left(1-e^{-(1-y)^2}\right)dy=\frac{1}{4e}.$$

例3.（2023期中，题6）计算积分 $I=\iint_D (x+y+xy)^2\,dxdy$，其中 $D=\{x^2+y^2\le 1\}$.

解. 注意到

$$(x+y+xy)^2 = x^2+y^2+(xy)^2+2xy+2x^2y+2xy^2.$$

故由区域对称性得

$$\iint_D xy\,dxdy=0,\quad \iint_D x^2y\,dxdy=0,\quad \iint_D xy^2\,dxdy=0.$$

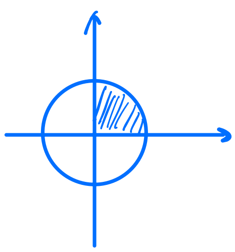
再利用极坐标换元得

$$I=\iint_D (x^2+y^2+x^2y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\sin^2\theta\cos^2\theta\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=2\pi\times\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}+\frac{1}{24}\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{13\pi}{24}.$$

例4（2021期中）求 $I=\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,dxdy$，其中 $D=\{x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

解.



令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，$0\le r\le 1$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$.

则

$$I=\iint_{D'} \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r\ln(1+r^2)\,dr\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left((1+r^2)\ln(1+r^2)-(1+r^2)\right)\Big|_0^1\,d\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1).$$

例5. 在平面上计算曲线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围区域的面积.

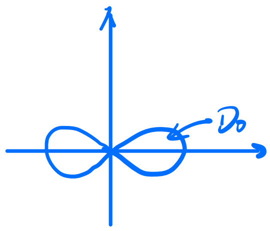
解 令 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$，则 $r^2=\cos 2\theta$. 由 $r^2\ge 0$ 知 $\theta\in[0,\frac{\pi}{4}]$

于是

$$I = 4\iint_{D_0} 1\, d\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} r\, dr\, d\theta$$

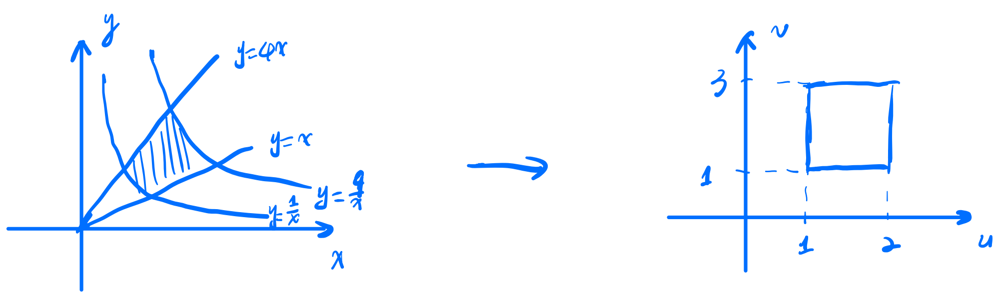
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\, d\theta = 1.$$



例6. 求 $I = \iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) dx dy$，其中 D 由 $xy=1$, $xy=9$, $y=x$ 和 $y=4x$ 在第一象限围成.

解.



令 $\begin{cases} u = \sqrt{\frac{y}{x}} \\ v = \sqrt{xy} \end{cases}$，则 $\begin{cases} x = \frac{v}{u} \\ y = uv \end{cases}$，$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \\ v & u \end{vmatrix}$

$$= -\frac{2v}{u}$$

于是

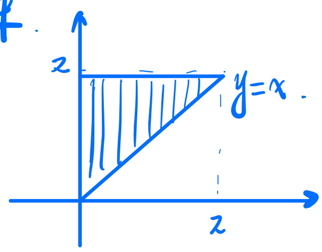
$$I = \iint_{D'} (u+v)\frac{2v}{u}\, du dv = \int_1^2\int_1^3 \left(2v + \frac{2v^2}{u}\right) dv du$$

$$= \int_1^2 8 + \frac{52}{3}\cdot\frac{1}{u}\, du$$

$$= 8 + \frac{52}{3}\ln 2.$$

例7 求 $I = \int_0^2 dx \int_x^2 \frac{\sin y}{y} dy$.

解.



$$I=\iint_D \frac{\sin y}{y}\,dxdy$$
$$=\int_0^2 dy\int_0^y \frac{\sin y}{y}\,dx$$
$$=\int_0^2 \sin y\,dy = 2.$$

例18.(难). 设 f 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数，设 $m\le f(x)\le M$. 求证

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right)\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\ge 1.$$

证明.

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\int_0^1 f(x)\,dx = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{f(y)}{f(x)}\,dxdy$$
$$=\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{f(x)}{f(y)}\,dxdy$$
$$=\frac{1}{2}\iint_{[0,1]\times[0,1]}\left(\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right)dxdy$$
$$\ge 1.$$

练习题

1. 求 $I=\iint_D (x+y)\,dxdy$，其中 D 是 $y=2x$，$x+y=4$ 和 $x+y=12$ 所围区域.

2. 求 $I=\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,dV$，其中 Ω 代表区域 $0\le z\le x^2+y^2\le 1$.

3. (难) 求 $I=\iiint_\Omega (x+y+z)^2\,dV$，其中 Ω 是 $x^2+y^2\le 2z$ 和 $x^2+y^2+z^2\le 3$ 相交部分.（提示：拆分被积函数并利用对称性）