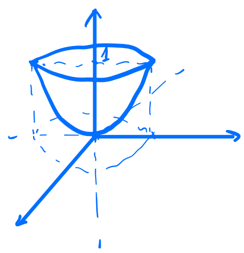
高数B第二次课 (4.13)

§ 期中复习

$\boxed{\text{例题}}$

例1.(21题3) 计算三重积分 $I=\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,dV$，其中 $\Omega:\ 0\le z\le x^2+y^2\le 1$

解.



$$I=\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}\left(\int_0^{x^2+y^2}(y^2+z^2)\,dz\right)dxdy$$

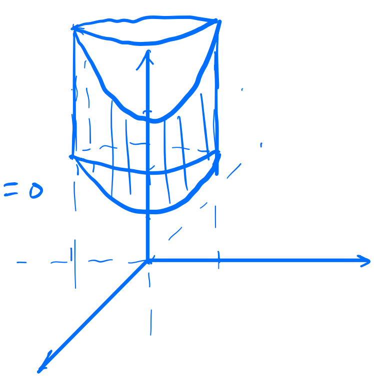
$$=\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}\left(\frac{1}{3}z^3+y^2z\right)\Big|_0^{x^2+y^2}dxdy$$

$$=\iint_{\{x^2+y^2\le 1\}}\frac{1}{3}(x^2+y^2)^3+(x^2+y^2)y^2\,dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\frac{1}{3}r^7+r^5\sin^2\theta\right)dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{6}\sin^2\theta\right)d\theta=\frac{\pi}{4}.$$

例2.(23题8) 计算积分 $I=\iiint_{\Omega}\frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\,dV$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$，$z=\sqrt{3(1+x^2+y^2)}$，$x^2+y^2=1$ 所围成的区域.



解. 首先由对称性知

$$\iiint_{\Omega}\frac{xy\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\,dV=0,\quad \iiint_{\Omega}\frac{yz\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\,dV=0$$

以及

$$\iiint_{\Omega}\frac{zx\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\,dV=0.$$

所以得

$$I=\iiint_{\Omega}\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}}{1+x^2+y^2+z^2}\,dV$$

利用柱坐标换元知区域Ω变为

$$\begin{cases} 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le r\le 1 \\ \sqrt{1+r^2}\le z\le\sqrt{3(1+r^2)} \end{cases}$$

于是积分

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{3(1+r^2)}}\frac{\sqrt{1+r^2}}{1+r^2+z^2}\,r\,dz$$

$$=2\pi\int_0^1 dr\int_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{3(1+r^2)}} r\cdot\frac{1}{\sqrt{1+r^2}}\,\frac{1}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{1+r^2}}\right)^2}\,dz$$

$$=2\pi\int_0^1 r\arctan\frac{z}{\sqrt{1+r^2}}\Big|_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{3(1+r^2)}}dr$$

$$=2\pi\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{12}=\frac{\pi^2}{12}.$$

例3.（23题4）设 $I(R)=\oint_{L_R}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x^2+xy+y^2)^2}$，其中 $L_R: x^2+y^2=R^2$ 取逆时针方向，证明 $\lim\limits_{R\to+\infty}I(R)=0$.

证明. $x^2+y^2=R^2$ 的参数表达为 $\begin{cases} x=R\cos\theta \\ y=R\sin\theta \end{cases}$ $0\le\theta\le2\pi$. 于是

$$I(R)=\oint_{x^2+y^2=R^2}\frac{x\,dy-y\,dx}{(x^2+xy+y^2)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta}{(R^2\cos^2\theta+R^2\sin\theta\cos\theta+R^2\sin^2\theta)^2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+\frac{1}{2}\sin2\theta)^2}\le\frac{1}{R^2}\cdot8\pi\to0,\quad R\to+\infty.$$

例4（22题4）设 $n\in N$，从点 $(0,0)$ 到点 $(n\pi,0)$ 的有向曲线 $L_n=\{(t,|\sin t|)\}$ 计算出下面第二型曲线积分在 $n\to\infty$ 下的极限：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n}e^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,dx+e^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,dy$$

解. 首先验证

$$\frac{\partial(e^{y^2-x^2}\sin 2xy)}{\partial x}-\frac{\partial(e^{y^2-x^2}\cos 2xy)}{\partial y}=e^{y^2-x^2}(-2x)\sin 2xy+e^{y^2-x^2}(2y)\cos 2xy$$

$$-\left(e^{y^2-x^2}(2y)\cos 2xy+e^{y^2-x^2}(-2x)\sin 2xy\right)$$

$$=0.$$

于是知此第二型积分与路径无关. 记 $I_n=\{(t,0):0\le t\le n\pi\}$, 故有

$$\int_{L_n}e^{y^2-x^2}\cos 2xy\,dx+e^{y^2-x^2}\sin 2xy\,dx=\int_{I_n}e^{y^2-x^2}\cos 2xy\,dx+e^{y^2-x^2}\sin 2xy\,dy=\int_0^{n\pi}e^{-x^2}dx$$

所以有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n}e^{y^2-x^2}\cos 2xy\,dx+e^{y^2-x^2}\sin 2xy\,dy=\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

例5 (21题3) 设曲线C为椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 沿逆时针方向. 计算 $\oint_C\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$.

解. 记

$$P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$$

则当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

取 L 为 $x^2+y^2=1$ 逆时针方向. 故由 Green 公式知

$$I=\oint_L\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}1\,d\theta=2\pi.$$

例6 (23题5) 设 L 为空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+z=1\end{cases}$, 其正向为自 z 轴向下看的逆时针方向. 计算 $I=\int_L(y-z+\sin^2x)dx+(z-x+\sin^2y)dy+(x-y+\sin^2z)dz$.

解. 记明 L 为边界的椭圆盘上侧为 S，故由 Stokes 公式得

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z+\sin^2 x & z-x+\sin^2 y & x-y+\sin^2 z \end{vmatrix}$$

$$= \iint_S (-2)\,dydz + 2\,dzdx + (-2)\,dxdy = \iint_S (-2,2,-2)\cdot\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\,dS$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\pi\sqrt{2} = -4\pi.$$

例17.(21题4) 计算曲面积分 $\iint_S (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\,dS$，其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下的部分.

解. 曲面 S 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$，$x^2+y^2\le 1$. 则

$$I = \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (x^2y^2+(x^2+y^2)^2)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2\le 1\}} (x^2y^2+(x^2+y^2)^2)\sqrt{2}\,dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{2}\, r^5 (1+\sin^2\theta\cos^2\theta)\,dr$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right)d\theta = \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{9}{8}\cdot 2\pi = \frac{3\sqrt{2}}{8}\pi.$$

例18.(23题10(3)) 设曲面 S 是柱体 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1\}$ 的表面外侧. 计算 $I=\iint_S (y-z)x^3\,dydz+(z-x)y^3\,dzdx+(x-y)z^3\,dxdy$

解. 由 Gauss 公式得

$$I = 3\iiint_\Omega \left((y-z)x^2+(z-x)y^2+(x-y)z^2\right)dV = 3\iiint_\Omega (zy^2-zx^2)\,dV = 0.$$

例9（21题9）设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数．证明

$$\iint_S f(x+y+z)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)\,d\xi .$$

其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$．

证明．对空间做正交变换 $(x,y,z)\mapsto(\xi,\eta,\varphi)$，使得

$$\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z).$$

又注意到旋转体的表面积为

$$dS = 2\pi\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1+\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^2}\,d\xi = 2\pi\,d\xi .$$

于是便得

$$\iint_S f(x+y+z)\,dS=\iint_S f(\sqrt{3}\xi)\,dS = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)\,d\xi .$$

例10．设 $F(t)=\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\le t^2\}} f(x^2+y^2+z^2)\,dV$，其中 $f(s)$ 是连续函数，在 $s=0$ 处可导且 $f(0)=0$，$f'(0)=10$．求 $\lim\limits_{t\to0}\frac{F(t)}{t^5}$．

解．注意到

$$F(t)=\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\le t^2\}} f(x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^t dr\int_{\{x^2+y^2+z^2=r^2\}} f(x^2+y^2+z^2)\,dS$$

$$=\int_0^t f(r^2)\,4\pi r^2\,dr .$$

于是由 L'Hospital 法则及导数存在的定义知

（注意这个需考导数定义不能用洛必达法则）

$$\lim_{t\to0}\frac{F(t)}{t^5}=\lim_{t\to0}\frac{f(t^2)4\pi t^2}{5t^4}=\frac{4\pi}{5}\lim_{t\to0}\frac{f(t^2)}{t^2}=\frac{4\pi}{5}f'(0)=8\pi .$$

例11．（21题6）．求常微分方程 $y'=xy+3x+2y+6$ 的所有解．

解．法一．（分离变量法）注意到

$$y' = (x+2)(y+3)$$

故 $y=-3$ 为一个解. 当 $y\neq -3$ 时, 有

$$\frac{y'}{y+3} = x+2$$

则

$$\ln|y+3| = \frac{1}{2}x^2+2x+C$$

即约

$$|y+3| = Ce^{\frac{1}{2}x^2+2x}, \quad C>0$$

从而有

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2+2x}-3, \quad C\neq 0.$$

又 $y=-3$ 为一个特解. 故原方程的所有解为

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2+2x}-3, \quad C\in\mathbb{R}.$$

法二. (利用一阶线性方程通式) 注意到

$$y'-(x+2)y = 3x+6$$

于是

$$y = \left[\int (3x+6)\, e^{-\int(x+2)dx}\, dx + C\right] e^{\int(x+2)dx}$$

$$= Ce^{\frac{1}{2}x^2+2x}-3.$$

例12 (22题8) 求二阶常微分方程 $y''+4y=\sin 3x$ 的通解.

解. $\lambda^2+4=0$ 的两个根为 $2i, -2i$. 因此 $y''+4y=0$ 的通解为

$$C_1\cos 2x + C_2\sin 2x.$$

设 $a\sin 3x$ 是一个特解, 则

$$\sin 3x = (a\sin 3x)'' + 4(a\sin 3x) = (-9a+4a)\sin 3x = -5a\sin 3x$$

得

$$a = -\frac{1}{5}.$$

于是 $y''+4y=\sin 3x$ 的通解为

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{1}{5}\sin 3x.$$

<u>例13</u>. 求解常微分方程 $xy'+2y=\sin x$ 满足 $y(\pi)=\frac{1}{\pi}$ 的特解.

解. 齐次方程 $y'+\frac{2}{x}y=0$ 的通解为

$$y = Cx^{-2}.$$

于是利用常数变易法知通解为

$$y(x) = C(x)x^{-2}.$$

代入原方程得

$$C'(x)x^{-2} = \frac{\sin x}{x}$$

解得

$$C(x) = -x\cos x + \sin x + C$$

于是通解为

$$y(x) = Cx^{-2} + x^{-2}\sin x - x^{-1}\cos x$$

代入 $y(\pi)=\frac{1}{\pi}$ 得 $C=0$. 故特解为

$$y(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}.$$

<u>例14</u>. 设 $y=y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上满足 $y'+a(x)y\le 0$，证明 $y(x)\le y(0)e^{-\int_0^x a(s)ds}$，$x\ge 0$.

<u>证明</u>. 令 $F(x)=y(x)e^{\int_0^x a(s)ds}$，则 $F'(x)\le 0$，故 $F(x)\le F(0)=y(0)$.

$\boxed{\text{练习题}}$

1. (22题3) 设 E 是椭圆 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\frac{y^2}{4}=1\}$. 求第一型曲线积分 $\int_E |xy|\,ds$.

提示 $E:\ \begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}\quad 0\le t\le 2\pi$.

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin t\cos t\sqrt{(\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}\cos 2t}\,dt$$

$$= -4\cdot\frac{2}{9}\left(\tfrac{5}{2}+\tfrac{3}{2}\cos 2t\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{56}{9}$$

2. (23题9) 计算积分 $I=\oint_\Gamma\left(\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin x^2\right)dx+\left(\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin y^2\right)dy$, 其中 Γ 是 $x^2+y^2=9\ (y\ge 0)$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1\ (y\le 0)$ 所组成的闭曲线的逆时针方向.

提示. 分成两个积分.

$$I=\underbrace{\oint_\Gamma \frac{y}{4x^2+y^2}dx+\frac{-x}{4x^2+y^2}dy}_{I_1}+\underbrace{\oint_\Gamma (1+\sin x^2)dx+(1+\sin y^2)dy}_{I_2}$$

由 Green 公式 $I_2=0$. $I_1=\oint_{\Gamma_1}\frac{y}{4x^2+y^2}dx+\frac{-x}{4x^2+y^2}dy$, Γ_1 为椭圆 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ 的逆时针方向. 故

$$I_1=\frac{1}{4}\oint_{\Gamma_1} y\,dx-x\,dy=\frac{1}{4}\iint_{\{x^2+\frac{y^2}{4}\le 1\}}(-2)\,d\sigma=-\pi.$$

3. (21题8) 设平面有界区域 D 为 $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\}$, 记 $L=\partial D$, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数. 记 $F=(P,Q)$, n 为曲线 L 的单位外法向量, 证明:

$$\oint_{L^+} F\cdot n\, ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

提示. 注意到 $n=(\cos\gamma, \sin\gamma)$ 可得切向量为 $t=(\cos(\gamma+\frac{\pi}{2}), \sin(\gamma+\frac{\pi}{2}))$

$$= (-\sin\gamma, \cos\gamma).$$

故利用第二型积分与第一型积分的关系以及 Green 公式便得.

4. 设 $f(t)$ 为连续函数, L 为分段光滑的闭曲线, 证明:

$$\oint_L f(xy)(y\,dx + x\,dy) = 0.$$

提示. 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, 则 知 $F\in C^1$, 且

$$dF(xy) = f(xy)y\,dx + f(xy)x\,dy.$$

再利用教材 84 页推论的证明方法即可得结论.

5. 设 $u\in C^2$, 若 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则称 u 为调和函数. 证明: $u(x,y)$ 为调和函数的充分必要条件是对任意分段光滑闭曲线 L, 都有

$$\oint_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0.$$

其中 n 表示 L 的外法向方法.

提示. 必要性. 由 Green 公式及 $\Delta u=0$ 知

$$\oint_L \nabla u\cdot n\, ds = \oint_L -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy = \iint_{D(L)} \Delta u\, dxdy = 0.$$

充分性. 由此知曲线积分 $\oint_L -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ 与路径无关, 故存在 $f(x,y)$ 使得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

故由 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ 知 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 故 u 为调和函数.

6. (22题6) 求第二型曲面积分 $\iint_S x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$, 其中 S 为单位球外侧

提示. 利用 Gauss 公式.