高数B第三次课（4.28）

§10 无穷级数

1. 数项级数的概念

• **定义**：部分和序列 $\{S_n\}$ 有极限，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$$

• **收敛的必要条件**：设 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为给定的一个无穷级数，则该级数收敛的必要条件是其通项趋于0.

• **Cauchy收敛原理**：级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n\geq N$, $p\geq 1$，有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{k=n+p} a_k\right| < \varepsilon.$$

注意 p 的任意性，可以与 n 有关.

• **性质**

(1) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 与 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 都收敛，则级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)$ 也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

(2) 若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，则 $\sum_{k=1}^{\infty}(ca_k)$ 也收敛，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}(ca_k) = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

(3)（结合律）将收敛级数的项任意加括号后所形成的新级数，仍然收敛到原级数的和.

2. 正项级数

- **比较判别法**. 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的一般项满足 $u_n \le v_n$, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

定理. 设有两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = h.$$

则

(1) 当 $0 \le h < +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(2) 当 $0 < h \le +\infty$ 时, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

- **比值判别法**. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

则

(1) 当 $l<1$ 时收敛.

(2) 当 $l>1$ 时发散.

(3) 当 $l=1$ 时不确定.

- **根值判别法**. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

则

(1) 当 $l<1$ 时收敛.

(2) 当 $l>1$ 时发散.

(3) 当 $l=1$ 时不确定.

- **积分判别法**. $f(x)$ 单调下降，非负，$u_n=f(n)$. 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分必要条件为无穷积分 $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

3. 一般项级数

- **绝对收敛与条件收敛**. 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

- **重排**：如果级数绝对收敛，那么重排以后依然绝对收敛.

- **Leibniz 判别法**. 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ 及 $\{a_n\}$ 单调递减，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

注意 $\{a_n\}$ 的单调性很重要，例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 不收敛.

- **Dirichlet 判别法**. 设 $\{a_n\}$ 单调下降趋于 0，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和序列有界，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

- **Abel 判别法**. 设 $\{a_n\}$ 单调有界，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例题

例 1. 证明以下命题：

(1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{n-1}+a_{2n}-a_{2n+1})$ 收敛.

(2) 设 $a+b+c\neq 0$. 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(aa_n+ba_{n+1}+ca_{n+2})$ 同敛散.

证明. (1) 级数通项为

$$2a_{2n-1}+a_{2n}-a_{2n+1}=2(a_{2n-1}+a_{2n})-(a_{2n}+a_{2n+1})$$

则由无穷级数的结合律知

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n}) \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1})$$

收敛. 再由级数的线性性质知原级数收敛, 且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_{2n-1}+a_{2n}-a_{2n+1})=2\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})-\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}+a_{2n+1}).$$

(2) 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}(aa_k+ba_{k+1}+ca_{k+2})=a\sum_{k=1}^{n}a_k+b\sum_{k=1}^{n}a_k+c\sum_{k=1}^{n}a_k$$
$$-ba_1+ba_{n+1}-ca_1-ca_2+ca_{n+1}+ca_{n+2}.$$

于是便知

$$\sum_{k=1}^{n}(aa_k+ba_{k+1}+ca_{k+2})-(a+b+c)\sum_{k=1}^{n}a_k\to -ba_1-c(a_1+a_2),$$

所以得 $\sum_{n=1}^{\infty}(aa_n+ba_{n+1}+ca_{n+2})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 同敛散.

例2. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 且 $a_n\geq a_{n+1}\geq 0$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}na_n=0.$$

证明. 由 Cauchy 收敛原理知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, s.t. $\forall n>N$ 有

$$\sum_{k=n+1}^{2n}a_k<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由 $a_k\geq a_{2n}$, $k=n+1,\cdots,2n$ 得

$$na_{2n}\leq\sum_{k=n+1}^{2n}a_k<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$2na_{2n} < \varepsilon$$

于是便知

$$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n} = 0.$$

又

$$(2n+1)a_{2n+1} = 2na_{2n+1} + a_{2n+1}$$

$$\leq 2na_{2n} + a_{2n+1}$$

故知

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0.$$

综上便得

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

<u>例3.</u> 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\ln n}}$, $(p>0)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\cos\frac{1}{n})$

(8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^n-q^n}$, $(0<q<p)$.

解. (1) $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & 0\le p\le 1\end{cases}$ 　$p<0$ 发散.

(2) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_1^{+\infty}=\begin{cases}收敛, & p>1\\ 发散, & p\le 1.\end{cases}$

(3) 注意到 $r^{\ln n}=n^{\ln r}$, 故 $r>e$ 收敛, $0<r\le e$ 发散.

(4) 注意到 $(\ln n)^{\ln n}=n^{\ln\ln n}$, 对于充分大的 n 有 $\ln\ln n>1$.

(5) ① $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{1}{e}<1.$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{n}{e}\right)=\frac{1}{e}<1.$ (斯特林公式).

(6) $\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}\le\frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{n}}(\sqrt{2}+1)}{3}=\frac{\sqrt{2}+1}{3}<1.$

(7) $1-\cos\frac{1}{n}=2\sin^2\frac{1}{2n}\le 2\cdot\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{2n^2}.$

(8) 首先注意到

$$\frac{1}{p^n-q^n}\ge\frac{1}{p^n}.$$

故当 $p\le 1$ 时发散. 又

$$p^n-q^n=(p-q)(p^{n-1}+p^{n-2}q+\cdots+q^{n-1})$$
$$\ge(p-q)p^{n-1}$$

故当 $q<p<1$ 时收敛

例4. 设 $a_n>0$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$. 证明：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散．　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛．

证明．(1) 注意到

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k}\geq\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_{n+p}}$$

$$=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$，知 $\lim_{p\to+\infty}S_{n+p}=+\infty$. 故对于充分大的 p 总有

$$S_{n+p}>2S_n.$$

于是知 $1-\frac{S_n}{S_{n+p}}>\frac{1}{2}$，故由 Cauchy 收敛原理知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散．

(2) 注意到

$$\frac{a_n}{S_n^2}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^2}\leq\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n},\quad n\geq2.$$

所以有

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^2}\leq\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_{k-1}}-\frac{1}{S_k}\right)$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{S_n}<\frac{2}{a_1}.$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛．

例5. 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$，$p>0$ 的敛散性．

解．由于

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|\leq\frac{1}{n^p},\quad\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leq\frac{1}{n^p},$$

所以 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 绝对收敛.

现考虑 $0<p\le 1$ 的情形. 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin kx\sin\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[\cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x).$$

于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \quad (x\neq 2m\pi)$$

同理，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right| = \left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x-\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \le \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \quad (x\neq 2m\pi)$$

又 $p>0$ 时，$\frac{1}{n^p}$ 单调递减趋于 0，所以由 Dirichlet 判别法知 $p>0$，$x\neq 2m\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 收敛. 又 $0<p\le 1$ 时有

$$\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \ge \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin nx}{n^p}\right|$ 发散，即当 $0<p\le 1$，$x\neq 2m\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}$ 条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ 类似可得在 $0<p\le 1$，$x\neq 2m\pi$ 时条件收敛.

当 $0<p\le 1$，$x=2m\pi$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}=0$，绝对收敛；$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散.

<u>例 6.</u> 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

<u>证明</u>. (利用阿贝尔变换)

记 $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$， $a_0=0$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k = \sum_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}A_kb_k - \sum_{k=1}^{n}A_{k-1}b_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}A_kb_k - \sum_{k=0}^{n-1}A_kb_{k+1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}A_k(b_k-b_{k+1}) + A_nb_{n+1}.$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n$ 存在. 于是 $\exists M>0$, s.t. $|A_n|\le M$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛，所以有

$$b_{n+1}=b_1-\sum_{k=1}^{n}(b_k-b_{k+1})$$

收敛. 于是便知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例7 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛性. 其中 $[\cdot]$ 为取整函数.

解. 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 不绝对收敛. 记

$$a_n = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2+1}+\cdots+\frac{1}{(n+1)^2-1}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{n^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{2n}\left(1-\frac{k}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left((2n+1)-\frac{2n+1}{n}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3})$$

又

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{n^2} + O(\frac{1}{n^3}) > 0, \text{ 充分大 } n$$

所以由 Leibniz 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 收敛.

例 8. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n}) a_n$ 也发散.

证明. 反证. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} (1+\frac{1}{n}) a_n$ 收敛, 记 $b_n = (1+\frac{1}{n}) a_n$, 则

$$a_n = \frac{n}{n+1} b_n.$$

注意到 $\{\frac{n}{n+1}\}$ 单调递增且有上界 1, 故由 Abel 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 矛盾.

例 9. 设 $\{a_n\}$ 是单调上升有界正值序列. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{a_n}{a_{n+1}})$ 收敛.

证明. 由 $\{a_n\}$ 单调上升有界知 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在. 又注意到

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} \le \frac{a_{n+1}-a_n}{a_1}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{a_n}{a_{n+1}}) \le \frac{1}{a_1} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}-a_n)$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n - a_1}{a_1}$$

收敛.

$\boxed{\text{练习}}$

1. 去掉例2中的条件"$a_n \geq a_{n+1} \geq 0$"，结论是否成立？

提示. 否. 反例

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2}, & \text{其它} \end{cases}$$

2. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^p}$，$p>1$ 收敛.

提示. Lagrange 中值定理得

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} \leq \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{S_{n-1}^{p-1}} - \frac{1}{S_n^{p-1}}\right).$$

3. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$ 条件收敛.

提示. 和例7类似.

4. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\sin n}{n}$ 的敛散性.

提示. 方法一：注意到 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$，$n \to \infty$ ← Euler 常数.

方法二：证明 $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n}$ 单调递减趋于 0.

5. 设 $\alpha > 1$，ξ_n 为方程 $f(x) = x^n + n^\alpha x - 1 = 0$ 的正根，试讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ 的敛散性.

提示. $f(0) = -1 < 0$，$f\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) > 0$，故 $0 < \xi_n < \frac{1}{n^\alpha}$.