高数 B 第六次课（6.9）

期末复习

作者：汪铃　个人主页：lwmath.github.io

例题

例 1 (23 年题 1)**.** 判断下列级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n \ln \sqrt[2]{n}}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$.

解. (1) 记

$$u_n = \frac{2}{n \ln \sqrt[2]{n}} = \frac{4}{n \ln n}.$$

注意到

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$$

发散，于是由积分判敛法知 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n \ln n}$ 发散，故 $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ 发散。

(2) 记

$$u_n = \frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} u_n / n^{-\frac{9}{5}} = \frac{3}{2},$$

且 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{9}{5}}}$ 收敛，故知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。 □

例 2 (23 年题 2)**.** 讨论函数序列 $f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}, \quad n = 1, 2, \cdots$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 的一致收敛性。

解. 由于

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1,$$

所以极限函数

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2} = 1, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

但是对于 $x_n=\sqrt[4]{n}$, $n=1,2,\cdots$, 有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|=1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\to 1-e^{-1}\neq 0,\quad (n\to\infty),$$

所以 $f_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛。 □

例 3 (23 年题 4)**.** 求$f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 于$x=1$ 处的泰勒展开式并计算$f^{(2022)}(1)$, $f^{(2023)}(1)$ 的值.

解. 首先注意到

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-1)^2-4}=-\frac{1}{4}\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}.$$

于是由几何级数展开式知

$$f(x)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{4^{n+1}}(x-1)^{2n},\quad |x-1|<1.$$

因为

$$a_{2022}(x-1)^{2022}=\frac{-1}{4^{1011+1}}(x-1)^{2022},\quad a_{2022}=\frac{f^{(2022)}(1)}{2022!},$$

所以知

$$f^{(2022)}(1)=-\frac{2022!}{4^{1012}}.$$

因为$a_{2023}(x-1)^{2023}=0$, 所以 $f^{(2023)}(1)=0$. □

例 4 (21 年题 5，22 年题 6)**.** 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^x+n}$$

的收敛域，绝对收敛点 x 的全体，条件收敛点 x 的全体。

解. 当 $x>1$ 时，我们有

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n^x+n}\right|=\frac{1}{n^x+n}<\frac{1}{n^x},$$

故知原级数绝对收敛。

当 $x\leq 1$ 时，有

$$\left|(-1)^n\frac{1}{n^x+n}\right|=\frac{1}{n^x+n}\geq\frac{1}{2n},$$

故知原级数不绝对收敛。

下面研究 $\dfrac{1}{n^x+n}$ 的单调性。把 n 换为实变量 y.

首先对于给定的 $x\geq 0$, 当变量 $y\geq 1$ 时，

$$(y^x+y)'_y \;=\; x\,y^{x-1}\;+\;1\;\geq\;0\;+\;1\;>\;0.$$

其次对于给定的 $x<0$, 当变量 y 趋于 $+\infty$ 时，xy^{x-1} 趋于 0. 因此，当 y 充分大时，

$$(y^x + y)'_y = x\,y^{x-1} + 1 > -\frac{1}{2} + 1 > 0.$$

所以，对于任何给定的 $x\in\mathbb{R}$, 当 n 充分大后，n^x+n 是单调上升的，因此 $\frac{1}{n^x+n}$ 是单调下降的，并且 $\frac{1}{n^x+n}$ 趋向于 0，于是由莱布尼兹法则知原级数收敛。

综上，原级数的收敛域为 $(-\infty,+\infty)$. 绝对收敛点全体为 $(1,+\infty)$，条件收敛点全体为 $(-\infty,1]$. □

例 5 (22 年题 7)**.** 定义函数 $\theta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为

$$\theta(x)=\int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t.$$

证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$$

收敛。

证明. 易知 $\theta(x)$ 连续可导且有

$$\theta'(x)=\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

对于

$$\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\theta'(x)\cos(\theta(x))}{\theta'(x)}\,\mathrm{d}x,$$

我们有

$$\left|\int_0^A \theta'(x)\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x\right| = |\cos(\theta(A))-\cos(\theta(0))|\le 2,$$

且

$$\frac{1}{\theta'(x)}=\frac{1}{\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}}$$

单调递减趋近于 0，所以由狄利克雷判别法知无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$$

收敛。 □

例 6 (23 年题 8)**.** 证明和计算下列各题:

(1) 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛；

(2) 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 可导；

(3) 求出函数 $I(t), t \in (0,+\infty)$;

(4) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ 的值.

证明. (1) 因为 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ 收敛，亦即关于 $t \in [0,+\infty)$ 一致收敛；
e^{-xt} 关于 x 单调递减，关于 $t \in [0,+\infty)$ 一致有界 $(0 \leqslant e^{-xt} \leqslant 1)$.
所以据一致 Abel 判敛法，$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x$ 关于 $t \in [0,+\infty)$ 一致收敛。

(2) 对任意的 $[c,d] \subset (0,+\infty)$, 易知 $f(x,t) = e^{-xt}\dfrac{\sin x}{x} \in C\left((0,+\infty) \times [c,d]\right)$ 以及 $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -e^{-xt}\sin x \in C\left((0,+\infty) \times [c,d]\right)$. 注意到

$$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| = \left|e^{-xt}\sin x\right| \leqslant e^{-cx}, \quad t \in [c,d],\, x \in (0,+\infty).$$

所以由 M 判别法知 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\, \mathrm{d}x$ 关于 $t \in [c,d]$ 一致收敛。则知 $I(t)$ 在 $[c,d]$ 上可导，再由 $[c,d] \subset (0,+\infty)$ 的任意性知 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导。

(3) 由 (2) 知

$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\, \mathrm{d}x = -\int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x\, \mathrm{d}x \\ &= \left.\frac{e^{-tx}}{1+t^2}(t\sin x + \cos x)\right|_0^{+\infty} = -\frac{1}{1+t^2}, \quad t \in (0,+\infty). \end{aligned}$$

所以

$$I(t) = -\arctan t + c, \quad t \in (0,+\infty).$$

又因为 $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < 1$，所以知

$$|I(t)| = \left|\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \mathrm{d}x = -\left.\frac{e^{-xt}}{t}\right|_0^{+\infty} = \frac{1}{t}, \quad t \in (0,+\infty),$$

则有 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 0$. 于是 $c = \dfrac{\pi}{2}$，即 $I(t) = -\arctan t + \dfrac{\pi}{2}, t \in (0,+\infty)$.

(4) 进一步，$f(x,t)$ 关于 $(x,t) \in (0,+\infty) \times [0,+\infty)$ 连续导致 $I(t) \in C[0,+\infty)$, 从而 $I(0) = \lim\limits_{t\to0+} I(t) = \dfrac{\pi}{2}$. 即

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

□

例 7 (21 年题 2). 求出无穷积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ 和瑕积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}\, \mathrm{d}x$ 的值.

解. (1) 由 Γ 函数的定义知

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x}\ \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{\frac{3}{2}-1} e^{-x}\ \mathrm{d}x = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

(2) 由 B 函数的定义知

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x\,(1-x)}}\ \mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\ \mathrm{d}x = B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi.$$

□

例 8 (23 年题 7)**.** 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$, 求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数，并给出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

解. 因为 $f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0$, $n=1,2,\cdots$. 下求 a_n, $n=0,1,2,\cdots$. 由 Fourier 系数公式得

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ \mathrm{d}x = \frac{2\pi^2}{3},\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\ \mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ \mathrm{d}\sin nx\\
&= \frac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\ \mathrm{d}\cos nx = \frac{2}{n^2\pi}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\ \mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{n^2\pi}2\pi\cos n\pi = \frac{(-1)^n 4}{n^2}, \quad n=1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 对应的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx.$$

由于$f(x)=x^2$ 在$[-\pi,\pi]$ 分段单调且连续, 所以

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx, \quad x\in[-\pi,\pi].$$

在上式中分别令 $x=\pi$, $x=0$，则得

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}, \quad 0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

最后, 根据 Parseval 等式得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \, \mathrm{d}x = 2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},$$

计算得

$$\frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^2}{9} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4},$$

即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^2}{90}.$$

□

例 9 (难). 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$ 。

解. 令

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}x^{3n-1}, \quad x \in (-1,1].$$

利用一致收敛性逐项求导得

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{3n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-x^3)^n x^{-2} = -\frac{x}{1+x^3}, \quad x \in (-1,1).$$

则积分得

$$\begin{aligned}
S(x) &= \int_0^x -\frac{t}{1+t^3} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^x \left(\frac{1}{t+1} - \frac{t+1}{t^2-t+1}\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^x \frac{1}{t+1} \, \mathrm{d}t - \frac{1}{6}\int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} \, \mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^x \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}(t-\frac{1}{2})\right)^2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln\left(1-x+x^2\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

最后，令 $x \to 1$, 便得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1} = \frac{\ln 2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ 。 □

练习

1. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为正项级数，并且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = b$。

(1) 证明：当 $b>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) b 取何值时，级数一定发散?

提示. 注意到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n^b} = 1,$$

然后利用比较判别法。 □

2. 设 $a \neq 0, p>0$, 试讨论下列级数的敛散性. 若收敛，问该级数是绝对收敛还是条件收敛?

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)}{(\ln n)^p}.$$

提示. 注意到

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right),$$

于是有

$$\frac{\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)}{(\ln n)^p} \sim \frac{(-1)^n \pi a^2}{2n(\ln n)^p}, \quad n\to\infty.$$

所以易得 $0<p\leq 1$ 时原级数条件收敛，$p>1$ 时原级数绝对收敛。 □

3. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ （其中 $p\geq 0$）的绝对收敛和条件收敛性。

提示. 0 不是瑕点, 故原积分等价于考虑 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\,\mathrm{d}x$ 的收敛性。由变量替换知

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin\left(x^2\right)}{1+x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{2t^{\frac{1}{2}}\left(1+t^{\frac{p}{2}}\right)}\,\mathrm{d}t$$

于是易知积分在 $p>1$ 时绝对收敛, $0\leq p\leq 1$ 时条件收敛。 □

4. (22 年题 8）设 n 是正整数。

(1) 任给常数 $a>0$. 证明含参变量 t 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(t+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x$$

在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛。

(2) 对于每个 $t \in (0,+\infty)$, 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$$

的值。

提示. (1) 注意到

$$\frac{1}{(t+x^2)^n} \le \frac{1}{(a+x^2)^n} \le \frac{1}{a+x^2}, \quad t \in [a,+\infty).$$

(2) 令

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x.$$

先证明 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 可导，然后类似于例题 6(3) 的做法求出 $I(t)$，注意在此过程中需要到分部积分以及递推。 □

5. 设 $f(x)$ 为以 2π 为周期，且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数。a_n, b_n 是 $f(x)$ 的 Fourier 系数。

(1) 试求延迟函数 $f(x+t)$ 的 Fourier 系数；

(2) 若 f 连续，$[-\pi,\pi]$ 上分段光滑，试求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

的 Fourier 展式，并由此推出 Parseval 等式.

提示. (1) 利用 $f(x)$ 的周期性，直接用 Fourier 系数的公式得 $\widetilde{a}_0 = a_0$,

$$\widetilde{a}_n = a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt), \quad \widetilde{b}_n = b_n\cos(nt) - a_n\sin(nt), \quad n = 1, 2, \cdots.$$

(2) 记 $F(x)$ 的 Fourier 系数为 α_n, β_n. 由于 $F(x)$ 是偶函数，所以 β_n=0. 直接计算得 $\alpha_0 = a_0^2$ 及 $\alpha_n = a_n^2 + b_n^2$. 于是便有

$$F(x) = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx.$$

最后，令 $x = 0$ 便有（注意到 $F(x)$ 连续）

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = F(0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

□