2024 年微分几何暑期学校 “复几何初步”习题

说明：共 4 题，每题 25 分，满分 100 分。

1. 假设 X 为 n-维复流形，$\pi : L \to X$ 为全纯线丛，s 为 $L^{\otimes m}$ 的全纯截面（$m \geq 2$），满足 $D = \{p \in X \mid s(p) = 0\}$ 非空，并且对任意 $p \in D$，存在局部平凡化，使得 s 的坐标表示 f 满足 $df(p) \neq 0$。证明：

$$Y := \{(q,t) \in L \mid t^{\otimes m} = s(q)\}$$

是 L（作为 $n+1$ 维复流形）的 n-维复解析子流形，并且 $\pi|_Y : Y \to X$ 是全纯映射。（注：这里 (q,t) 表示 L 全空间中的点，$q \in X$，且 $t \in L_q$。）

2. 假设 X 为紧复流形，L 为其上的全纯线丛。课上已证：由其关于局部平凡化 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 转移函数 $\{\psi_{\alpha\beta}\}$ 可以得到一个 Čech cocycle，进而得到 $H^1(X, \mathscr{O}^*)$ 中的一个元素。证明：
   (a) 该元素只依赖于 L 的同构类，即若 L' 为与 L 同构的全纯线丛，则其 cocycle 决定相同的上同调类。
   (b) 假如两个全纯线丛 L_1, L_2 决定的 $H^1(X, \mathscr{O}^*)$ 中的上同调类相同，则此二丛同构。

3. 假设 $E \to X$ 是复流形 X 上 rank=2 的全纯向量丛,h 是 E 上 Hermitian 度量，满足其 Chern 联络的曲率恒为 0. 假设 $L \subset E$ 是 rank=1 的全纯子丛，即 $L \to X$ 是全纯线丛，L 是 E 的复子流形，并且对任意 $p \in X$, $L_p \subset E_p$ 是 1 维线性子空间。证明：L 上诱导 Hermitian 度量的 Chern 联络的曲率 2-形式处处半负定。

4. 假设 (X, ω_g) 是紧 Kähler 曲面，满足第一陈类为负。记 $c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$ 为全纯切丛 $T^{1,0}X$ 的第 i 个陈类。证明：$\langle 3c_2 - c_1^2, [X] \rangle \geq 0$。（提示：利用特殊的 Kähler 度量计算对应的 Chern-form 的积分）