高数C期末试题参考答案

2022 -2023　学年第一学期

考试科目：高等数学C(一)　　**考试时间：**2022年12月 22 日

姓　名:____________________　**学　号:** ____________________

本试题共 8 **道大题，满分** 100 **分**

1. 求函数$f(x)=2(\sin x)^2-e^{-x^2}$ 在 $x_0=0$ 处的局部泰勒公式(10分).

   解：$2(\sin x)^2=1-\cos 2x=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\dfrac{(2x)^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})$,

   以及 $e^{-x^2}=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k x^{2k}}{k!}+o(x^{2n})$.

   所以，

   $f(x)=-1+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}(\dfrac{2^{2k}}{(2k)!}+\dfrac{1}{k!})x^{2k}+o(x^{2n})$.

2. 求积分(30分)

   (1) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$;

   解：原式=$x\arcsin x-\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

   (2) $\displaystyle\int\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

   解：原式=$\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2x+2)}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}dx$

   $=\sqrt{x^2+2x+2}-\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})+C$.

   (3) $\displaystyle\int\frac{1}{3x+\sqrt[3]{3x+2}}dx$;

   解：令$t=\sqrt[3]{3x+2}$, 则

   原式=$\displaystyle\int\frac{t^2dt}{t^3+t-2}=\int\frac{1}{4}(\frac{1}{t-1}+\frac{3t+2}{t^2+t+2})dt$

   $=\dfrac{1}{4}\ln|t-1|+\dfrac{3}{8}\ln(t^2+t-2)+\dfrac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\dfrac{2t+1}{\sqrt{7}}+C$

   $=\dfrac{1}{4}\ln|\sqrt[3]{3x+2}-1|+\dfrac{3}{8}\ln(\sqrt[3]{3x+2^2}+\sqrt[3]{3x+2}-2)+\dfrac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\dfrac{2\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{7}}+C$.

(4) $\int \dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

解：令$t=\tan x$, 则

原式=$\dfrac{dx}{1+\tan x}=\int \dfrac{1}{1+t}\dfrac{dt}{1+t^2}=\dfrac{1}{2}\int(\dfrac{1}{1+t}-\dfrac{t-1}{1+t^2})dt$

$=\dfrac{1}{2}[\ln|1+t|-\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)+\arctan t]+C$

$=\dfrac{1}{2}[\ln|1+\tan x|-\dfrac{1}{2}\ln|\sec x|+x]+C$

$=\dfrac{1}{2}[\ln|\cos x+\sin x|+x]+C.$

(5) $\int_{-1}^{1}(1+x^7)(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$;

解：令$x=\sin t$, 则

原式=$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^4dt=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)^2dt=\dfrac{3\pi}{8}.$

(6) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$

解：令$x=\tan t$, 则

原式=$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{t}{(\sec t)^3}(\sec t)^2dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos tdt=\dfrac{\pi}{2}-1.$

3. 求抛物线 $y^2=4(4-x)(0\le x\le 2)$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体的侧面积和体积(10分).

解：$S=4\pi\int_0^2\sqrt{5-x}dx=\dfrac{8\pi}{3}(5^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}})$,

以及

$V=\pi\int_0^2 4(4-x)dx=24\pi.$

4. 判断下面积分的敛散性（说明理由）(10分)

(1) $\int_0^1\dfrac{\sqrt{\sin x}}{x\sqrt{1-x}}dx$;

解：$\int_0^{1/2}\dfrac{\sqrt{\sin x}}{x\sqrt{1-x}}dx+\int_{1/2}^1\dfrac{\sqrt{\sin x}}{x\sqrt{1-x}}dx:=I_1+I_2.$

注意到：$\frac{\sqrt{\sin x}}{x\sqrt{1-x}}\sim x^{-\frac{1}{2}}, x\to 0+0$, 而

$\int_0^{1/2}x^{-\frac{1}{2}}dx$ 收敛，因此，I_1 收敛.

另外，注意到：$\frac{\sqrt{\sin x}}{x\sqrt{1-x}}\sim\frac{\sqrt{\sin 1}}{\sqrt{1-x}}, x\to 1-0$, 而

$\int_{1/2}^1\frac{\sqrt{\sin 1}}{\sqrt{1-x}}dx$ 收敛，因此，I_2 收敛.

所以，$\int_0^1\dfrac{\sqrt{\sin x}}{x\sqrt{1-x}}dx$ 收敛.

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(1+\sqrt{x})}dx.$

解：$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(1+\sqrt{x})}dx = \int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\ln(1+\sqrt{x})}dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(1+\sqrt{x})}dx := I_1 + I_2.$

注意到：$\displaystyle\frac{e^{-x}}{\ln(1+\sqrt{x})} \sim x^{-\frac{1}{2}}, x \to 0+0$, 而

$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}dx$ 收敛，因此，I_1 收敛.

另外，注意到：$\displaystyle\frac{e^{-x}}{\ln(1+\sqrt{x})} \leq \frac{e^{-x}}{\ln 2}, x \geq 1$, 而

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln 2}dx$ 收敛，因此，I_2 收敛.

所以，$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\ln(1+\sqrt{x})}dx$ 收敛.

5. 求通过两直线 $l_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z+1}{1}$ 和 $l_2 : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ 的平面方程(10分).

   解：该平面法向量$\overrightarrow{n} = (2, -1, 1) \times (-3, 3, 1) = (4, 5, -3)$, 因此，

   该平面方程为：$4(x-1) + 5(y+1) - 3(z+1) = 4x + 5y - 3z - 2 = 0.$

6. 设 l 是由两平面 $x+y+z+1 = 0$ 与 $x-y+z-1 = 0$ 相交的直线, 求过点 $A(2, 1, 3)$ 且平行于 l 的直线方程(10分).

   解：直线方程方向向量$\overrightarrow{n} = (1, 1, 1) \times (1, -1, 1) = (2, 0, -2)$, 因此，

   直线方程为: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-3}{-2}.$

7. 设函数 $f(t)$ 在有界闭区间 $[0, T]$ 上连续，证明：

   $\displaystyle\int_0^T f(t) \left(\int_0^t f(s)ds\right) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^T f(t)dt\right)^2.$ (10分)

   证明：因为 $\displaystyle\frac{1}{2}\frac{d\left(\int_0^t f(s)ds\right)^2}{dt} = f(t)\int_0^t f(s)ds$, 所以，

   $$\frac{1}{2}\left(\int_0^T f(t)dt\right)^2 = \int_0^T \frac{1}{2}\frac{d\left(\int_0^t f(s)ds\right)^2}{dt}dt = \int_0^T f(t)\int_0^t f(s)dsdt.$$

   另证：注意到$\displaystyle\int_0^T f(t)\int_0^t f(s)dsdt = \int_0^T f(t)\int_t^T f(s)dsdt$, 所以，

   $$\int_0^T f(t)\int_0^t f(s)dsdt = \frac{1}{2}(\int_0^T f(t)\int_0^t f(s)dsdt + \int_0^T f(t)\int_t^T f(s)dsdt) = \frac{1}{2}\left(\int_0^T f(t)dt\right)^2.$$

8. 设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $[a, b]$ 上黎曼可积，$c \in (a, b)$ 是 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的唯一间断点，以及 $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = B$, 且$A \neq B$(A, B 为有限数). 证明函数 $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ 在 $x = c$ 点处不可导(10分).

证明：设$F_1(x) = f(x), a \leq x < c, F_1(c) = B$, 那么$F_1(x)$ 在区间 $[a, c]$ 上连续，且 $\Phi(x) = \int_a^x F_1(t)dt, x \in [a, c]$. 因此，

$\Phi'_-(c) = F_1(c) = B$.

同理，设$F_2(x) = f(x), c < x \leq b, F_2(c) = A$, 那么$F_2(x)$ 在区间 $[c, b]$ 上连续，且 $\Phi(x) = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x F_2(t)dt, x \in [c, b]$. 因此，

$\Phi'_+(c) = F_2(c) = A$.

所以，

$\Phi'_-(c) = B \neq A = \Phi'_+(c)$. 证毕.