# 2022 BICMR 微分几何暑期学校

## 复几何初步试题

试题说明: 共 6 题, 每题 20 分, 选做部分 10 分。请任意选择其中 5 道作答, 如果解答全部题目，按得分最高的 5 题计算总分。如卷面总分超出 100 分, 按 100 计算。

1. 假设 $X$ 为 $n$-维复流形，$\pi: L \to X$ 为全纯线丛，$s$ 为 $L^{\otimes m}$ 的全纯截面（$m \geq 2$），满足 $D = \{p \in X \mid s(p) = 0\}$ 非空，并且对任意 $p \in D$，存在局部平凡化，使得 $s$ 的坐标表示 $f$ 满足 $df(p) \neq 0$。证明:

$$Y := \{(q,t) \in L \mid t^{\otimes m} = s(q)\}$$

是 $L$（作为 $n+1$ 维复流形）的 $n$-维复解析子流形，并且 $\pi|_Y : Y \to X$ 是全纯映射。(注: 这里 $(q,t)$ 表示 $L$ 全空间中的点，$q \in X$，且 $t \in L_q$。)

2. 假设 $X$ 为 Hopf 曲面

$$X = \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}/\sim,$$

其中等价关系 $\sim$ 为 $(z_1, z_2) \sim (2z_1, 2z_2)$。请计算 $H^0(X,\mathscr{O}), H^2(X,\mathscr{O})$ 与（选做）$H^1(X,\mathscr{O}), H^1(X,\mathscr{O}^*)$.

3. 设 $X$ 为 $n$ 维复流形，$L \to M$ 是全纯线丛，赋予 Hermitian 度量 $h$。假设 $(L,h)$ 的 Chern 联络的曲率是负的（即 $\Theta = \sum_{i,j} \Theta_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ 满足 $\Theta_{i\bar{j}}\xi^i\bar{\xi}^j < 0, \forall \xi \in \mathbb{C}^n, \xi \neq 0$）。证明:“单位圆盘丛”

$$\Omega := \{(p,v) \in L \mid h_p(v,v) < 1\}$$

是 $L$（作为 $n+1$ 维复流形）的强拟凸域，即存在 $L$ 上光滑函数 $\varphi$，满足 $\Omega$ 由 $\varphi < 0$ 定义，并且在 $\partial\Omega$ 上满足 $d\varphi \neq 0$ 和 $(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial w_i \partial \bar{w}_j}) > 0$，其中 $(w_1, \ldots, w_{n+1})$ 是局部全纯坐标。

4. 假设 $X$ 是 $n$ 维的紧致复流形，$\eta$ 是 $X$ 上的全纯 $p$-形式。证明: 如果下列条件之一成立，则一定有 $d\eta = 0$:

(1) $X$ 是 Kähler 流形；

(2) $n = 2$。

5. 考虑 $\mathbb{C}P^3$ 中的光滑超曲面

$$X = \{[z_0, z_1, z_2, z_3] \mid z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = 0\}.$$

请证明 $c_1(X) < 0$.

6. 假设 $(X, \omega_g)$ 是 $n$ 维 Kähler 流形，$n \geq 2$。证明：任给 $p \in X$，都存在开邻域 $U$，以及 $U$ 上实值光滑函数 $\psi$，满足 $\omega_g|_U = \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\psi$；并由此证明一定存在局部全纯坐标 $(z_1, \ldots, z_n)$，满足

$$g_{i\bar{j}}(p) = \delta_{ij}, \quad dg_{i\bar{j}}(p) = 0, \quad \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial z_k \partial z_l}(p) = \frac{\partial^2 g_{i\bar{j}}}{\partial \bar{z}_k \partial \bar{z}_l}(p) = 0, \quad \forall i, j, k, l.$$