

北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2021 - 2022学年第 2 学期

考试科目 高等数学B2

姓 名 _____ 学 号 _____

本试题共 9 道大题，满分 100 分

在下面试题中， \mathbb{R} 记实数域， \mathbb{R}^n 记标准的 n 维欧氏空间。

1.(10分) 设 D 是由直线 $y = 0, y = 1, y = x, y = x + 1$ 所围成的有界闭区域。求二重积分 $\iint_D (4y - 2x) dx dy$.

参考答案:

$$\begin{aligned} & \iint_D (4y - 2x) dx dy \\ &= \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} (4y - 2x) dy + \int_0^1 dx \int_x^1 (4y - 2x) dy \\ &= \int_{-1}^0 (2(x+1)^2 - 2x(x+1)) dx + \int_0^1 ((2 - 2x^2) - 2x(1-x)) dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x+2) dx + \int_0^1 (2-2x) dx \\ &= (x^2 + 2x)|_{-1}^0 + (2x - x^2)|_0^1 \\ &= 0 - ((-1)^2 - 2) + (2 - 1) - 0 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2.(10分) 设 V 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体。求三重积分 $\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dx dy dz$.

参考答案:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \frac{1}{1+x+y+z} dx dy dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{-1}{1+x+y+z} \Big|_0^{1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{-1}{2} - \frac{-1}{1+x+y} \right) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-y}{2} \Big|_0^{1-x} + \ln(1+x+y) \Big|_0^{1-x} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{-1+x}{2} + \ln 2 - \ln(1+x) \right) dx \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{x^2}{4} \Big|_0^1 + \ln 2 - (1+x) \ln(1+x) \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \\ &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} + \ln 2 - 2 \ln 2 + 1 \\ &= \frac{3}{4} - \ln 2 \end{aligned}$$

3.(10分) 设 E 是椭圆 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$. 求第一型曲线积分 $\int_E |xy| ds$.

参考答案: E 的参数方程是 $x = \cos t, y = 2 \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. 由对称性得

$$\begin{aligned} \int_E |xy| ds &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} xy \sqrt{((\cos t)')^2 + ((2 \sin t)')^2} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos t \sin t \sqrt{(\sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + 3 \cos^2 t} dt \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos 2t} dt \end{aligned}$$

令 $u = \cos 2t$ 得 $du = -2 \sin 2t dt$, 所以上式等于

$$\begin{aligned} &= -2 \int_1^{-1} \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}u} du = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}u} du = 2 \frac{2}{3} \frac{2}{3} \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}u\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{8}{9} (4)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{9} (1)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{56}{9} \end{aligned}$$

4.(15分) 设 n 是正整数, 从点 $(0, 0)$ 到点 $(n\pi, 0)$ 的有向曲线 $L_n = \{(t, |\sin t|) \mid 0 \leq t \leq n\pi\}$. 计算出下面第二型曲线积分在 $n \rightarrow \infty$ 下的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} e^{y^2-x^2} \cos(2xy) dx + e^{y^2-x^2} \sin(2xy) dy$$

参考答案:

(1) 首先验证

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (e^{y^2-x^2} \sin(2xy))}{\partial x} - \frac{\partial (e^{y^2-x^2} \cos(2xy))}{\partial y} \\ &= e^{y^2-x^2} (-2x) \sin(2xy) + e^{y^2-x^2} \cos(2xy) 2y - e^{y^2-x^2} 2y \cos(2xy) - e^{y^2-x^2} (-\sin(2xy)) 2x \\ &= 0 \end{aligned}$$

(2) 为了简化符号, 记

$$\begin{aligned} \omega &= e^{y^2-x^2} \cos(2xy) dx + e^{y^2-x^2} \sin(2xy) dy \\ I_n &= \{(t, 0) \mid 0 \leq t \leq n\pi\} \end{aligned}$$

\mathbb{R}^2 是单连通区域, 因此根据第二型曲线积分与路径无关的定理 (教材第81页定理2), 上面 (1) 推出

$$\int_{L_n} \omega = \int_{I_n} \omega = \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx$$

(3) 设

$$E_n = \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx$$

$$E_n^2 = \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx = \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx \int_0^{n\pi} e^{-y^2} dy = \frac{1}{4} \iint_{[-n\pi, n\pi] \times [-n\pi, n\pi]} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

推出

$$\frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq (n\pi)^2} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq E_n^2 \leq \frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq (\sqrt{2} n\pi)^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

用极坐标 (r, θ) 计算

$$\frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{1}{4} 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2}\right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$$

推出

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-(n\pi)^2}) \leq E_n^2 \leq \frac{\pi}{4}(1 - e^{-(\sqrt{2}n\pi)^2})$$

用 $E_n \geq 0$ 推出

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}(1 - e^{-(n\pi)^2})} \leq E_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}(1 - e^{-(\sqrt{2}n\pi)^2})}$$

推出

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

和上面 (2) 一起推出

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} e^{y^2-x^2} \cos(2xy) dx + e^{y^2-x^2} \sin(2xy) dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} \omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

5.(10分) 设 S 是曲面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$. 求第一型曲面积分 $\iint_S x dS$.

参考答案: $z = \sqrt{1-x^2}$.

$$\begin{aligned} \iint_S x dS &= \iint_S x \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dS \\ &= \int_0^1 \int_0^1 x \sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^2+0} dx dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

6.(10分) 求第二型曲面积分 $\iint_{x^2+y^2+z^2=1 \text{ 外侧}} x dydz + y dzdx + z dxdy$.

参考答案: 比较快的方法是用高斯公式得到

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2+z^2=1 \text{ 外侧}} x dydz + y dzdx + z dxdy \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dxdydz \\ &= \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} 3 dxdydz = 3 \text{ 单位球体的体积} = 4\pi \end{aligned}$$

(注: 若用其他方法计算, 也分步得分。)

7.(15分) 假设平面直角坐标系第一象限中有一条曲线 $L = \{(x, y(x)) \mid x \geq 0\}$, 其中 $y(0) = 1$, $y(x)$ 是严格递减的、正的、可导函数。任取 L 上一点 M , L 在 M 点的切线交 x 轴于点 A . 假定从 M 到 A 的直线段的长度恒为 1. 求出 $y = y(x)$ 所满足的一阶常微分方程, 并且解出这个方程的初值问题 $y(0) = 1$.

参考答案:

(1) 设 $M = (x, y(x))$. L 在 M 点的切线的坐标 (X, Y) 满足直线方程

$$Y - y = y'(x)(X - x)$$

此直线交 x 轴于点 $A = (x - \frac{y}{y'(x)}, 0)$

(2) 从 $M = (x, y(x)) = (x, y)$ 到 $A = (x - \frac{y}{y'(x)}, 0)$ 直线段的长度是

$$\sqrt{\left(\frac{y}{y'(x)}\right)^2 + y^2}$$

条件“从 M 到 A 直线段的长度恒为 1”推出

$$\sqrt{\left(\frac{y}{y'(x)}\right)^2 + y^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{(y'(x))^2} + y^2 = 1$$

$$(y'(x))^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$

(3) 用条件“ $y(x)$ 是严格递减的、正的、可导函数”推出 $y'(x) < 0$, $y = y(x) > 0$, 因此

$$y'(x) = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

$y = y(x)$ 所满足的一阶常微分方程是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$$

(4) 分离变量得

$$-\frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = dx$$

用不定积分的换元法 $y = \sin t$ 可以得到

$$x = -\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} dy = -\sqrt{1-y^2} + \ln(1+\sqrt{1-y^2}) - \ln y + C$$

(5) 初值条件 $y(0) = 1$ 推出 $C = 0$. 代入上面 (4) 得

$$x = -\sqrt{1-y^2} + \ln(1+\sqrt{1-y^2}) - \ln y$$

8.(10分) 求二阶常微分方程 $y'' + 4y = \sin 3x$ 的通解。

参考答案:

(1) $\lambda^2 + 4 = 0$ 的两个根 $2i, -2i$. 因此 $y'' + 4y = 0$ 的通解是

$$C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

C_1, C_2 是独立的任意常数。

(2) 设 $a \sin 3x$ 是一个特解。则

$$(a \sin 3x)'' + 4a \sin 3x = \sin 3x$$

$$-9a + 4a = 1$$

$$a = -\frac{1}{5}$$

(3) 因此 $y'' + 4y = \sin 3x$ 的通解是

$$C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$$

C_1, C_2 是独立的任意常数。

9.(10分) 两小题。

(1) .(5分) 设 $D = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \mid x \geq 0\}$. 写出一个函数 $T: D \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 T 在 D 中每点可微, 并且

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

(2) .(5分) 设 $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. 证明不存在函数 $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微, 并且

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

参考答案:

(1).
(1.1) 定义

$$T: D = \mathbb{R}^2 - \{ (x, 0) \mid x \geq 0 \} \rightarrow \mathbb{R}$$

如下: 当 $(x, y) \in D$, $T(x, y)$ 是从 x 轴到向量 (x, y) 的逆时针方向的夹角,

$$0 < T(x, y) < 2\pi .$$

此夹角函数在 D 上是单值定义的, 对 (x, y) 是连续的、可微的。具体表达式:

当 $(x, y) \in D$ 并且 $x > 0, y > 0$ 时, $T(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.

当 $(x, y) \in D$ 并且 $x = 0, y > 0$ 时, $T(x, y) = \frac{\pi}{2}$.

当 $(x, y) \in D$ 并且 $x < 0$ 时, $T(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + \pi$.

当 $(x, y) \in D$ 并且 $x = 0, y < 0$ 时, $T(x, y) = \frac{3\pi}{2}$.

当 $(x, y) \in D$ 并且 $x > 0, y < 0$ 时, $T(x, y) = \arctan \frac{y}{x} + 2\pi$.

(1.2) 如果 $(x, y) \in D$ 并且 $x \neq 0$ 时, 则 $T(x, y) = \arctan \frac{y}{x} +$ 一个常数。

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial(\arctan \frac{y}{x})}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial(\arctan \frac{y}{x})}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(1.3) 如果 $(x_0, y_0) \in D$ 并且 $x_0 = 0$ 时, 则在 (x_0, y_0) 的一个开邻域中有 $y \neq 0$, $T(x, y) = \operatorname{arccot} \frac{x}{y} +$ 一个常数。

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial(\operatorname{arccot} \frac{x}{y})}{\partial x} = -\frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial(\operatorname{arccot} \frac{x}{y})}{\partial y} = -\frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} \frac{-x}{y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

所以在 D 中每点有

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

(2). 反证法。

(2.1) 假设存在函数 $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微, 并且

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} .$$

设 C 是圆周 $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 定向为逆时针方向, 则第二型曲线积分

$$\int_C \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy = \int_0^{2\pi} d(U(c(t))) = U(c(t))|_0^{2\pi} = U(1, 0) - U(1, 0) = 0$$

(2.2) 另一方面

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy &= \int_C -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t)(-\sin t) dt + \cos t \cos t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi . \end{aligned}$$

这个与 (2.1) 矛盾。反证法成立。