

北京大学高等数学C(二)期中试题

2022年4月21日

1. 求导数(10分)

(1) 设  $z = e^{x^2+yx}$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;

(2) 设  $z = z(x, y)$  由方程  $F(xyz, x + y, z - y) = 0$  确定的隐函数, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ .

2. 证明光滑曲面  $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$  上的任何一点的切平面通过一定点。(10分)

3. 求函数  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x + 2$  在闭区域:  $x^2 + y^2 \leq 9$  上的最大值与最小值。(15分)

4. 设  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{4}{3}}}{\sin(x^2 + y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$  问  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  是否连续?  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  是否可微?  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  方向导数是否存在? 说明理由。(15分)

5. 计算:  $\iint_D \sqrt{|y-x^2|} dx dy$ ,  $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ . (10分)

6. 设  $\Omega$  为曲面  $x^2 + y^2 = z$  与  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  所围成的空间区域。求  $\Omega$  的表面积。(10分)

7. 计算  $\iiint_{\Omega} (x \cos y + z) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$  和  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所围成的区域。(10分)

8. 计算  $\int_L |xy| ds$ , 其中  $L$  是椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  曲线,  $a, b > 0$ . (10分)

9. 计算  $\int_L \frac{xdy - ydx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是沿  $y = 1 - 16x^2$  由  $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -1\right)$  到  $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, -1\right)$  的曲线段。(10分)