泛函分析2020-2021春季学期期末试题

任课教师：周斌

1. (18分) 试求如下作用在复 l^2 空间上的算子的共轭算子：

   (1) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,0,a_1x_1,a_2x_2,\cdots)$, 其中 $(a_1,a_2,\cdots)\in l^2$;

   (2) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,0,\cdots,0,x_1,0,\cdots)$, 即除第 n 项外都取0；

   (3) $T:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(a_nx_n,a_{n+1}x_{n+1},\cdots)$, 其中 $(a_1,\cdots,a_n,\cdots)\in l^2$.

2. (10分) $\mathscr{X}$ 是实赋范线性空间，M 是 $\mathscr{X}$ 的闭子空间，$x_0\in\mathscr{X}\backslash M$. 证明：

$$\rho(x_0,M)=\inf_{y\in M}\|x_0-y\|=\sup_{f\in M^\perp,\|f\|=1}f(x_0),$$

   其中 $M^\perp=\{f\in\mathscr{X}^*|\forall\, x\in M,f(x)=0\}$.

3. (10分) 假设 $\mathscr{X}$ 是Banach空间，$A,B\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$且 B 是紧算子。证明：$\sigma(A)\backslash\sigma_p(A)\subset\sigma(A+B)\backslash\sigma_p(A+B)$.

4. (15分) 设 $\mathscr{X}$ 是实 $l^p(p\geqslant 1)$ 空间。$\{k_n\}_{n=1}^{+\infty}$为一列有界实数。考虑 $\mathscr{X}$ 上算子 $A:(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(0,k_1x_1,k_2x_2,\cdots)$. 证明：$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 且 A 为紧算子当且仅当 $k_n\to 0$.

5. (10分) 假设 $\mathscr{X}$ 是Banach空间，$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$. 证明下列两条等价：

   (1) $\dim N(T)<+\infty$ 且 $R(T)$ 是闭的;

   (2) 任意有界序列 $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 若满足 $\lim\limits_{n\to+\infty}Tx_n=0$ 则一定有收敛子列。

6. (12分) 设 F 是复数域 $\mathbb{C}$ 中的有界闭集，$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 F 的一个稠密子集。定义 l^1 空间上的一个有界线性算子 $T:(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mapsto(a_1x_1,\cdots,a_nx_n,\cdots)$. 试求 $\sigma_p(T)$, $\sigma_c(T)$, $\sigma_r(T)$.

7. (15分) 设 $\mathscr{X}$ 是复Hilbert空间。求证：

   (1) $P\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$ 是 $\mathscr{X}$ 上的正交投影算子当且仅当 $P^*P=P$;

   (2) 若 P 和 Q 分别为正交投影算子，证明当且仅当 $PQ=QP$ 时，$T=P+Q-PQ$ 也是正交投影算子。

8. (10分) 设 $T:\mathscr{X}\mapsto\mathscr{Y}$ 是Fredholm算子，$L\subset\mathscr{X}$ 为闭子空间且 $L\cap N(T)=\emptyset$. 设 $T_1:\mathscr{X}/L\mapsto\mathscr{Y}/T(L)$ 为由 T 生成的算子。证明 T_1 是Fredholm算子且 $\mathrm{ind}(T)=\mathrm{ind}(T_1)$.