泛函分析2020-2021春季学期期中试题

任课教师：周斌

1. (10分) 叙述Schauder不动点定理。

2. (10分) 设 $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 中的有界序列，定义映射 $T : l^p \to l^p$ 如下：$(x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mapsto (a_1 x_1, \cdots, a_n x_n, \cdots)$. 求 $\|T\|$.

3. (10分) 考虑区间 $[0,1]$ 的一个分化 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$. 对$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}, A_n \in \mathbb{R}$, 定义$C[0,1]$ 上的泛函$f : x(t) \mapsto \sum_{k=0}^{n} A_k x(t_k)$, 证明$f$ 连续并求$\|f\|$.

4. (10分) 设 $\mathscr{X}$ 为Banach空间, T 是 $\mathscr{X}$ 到自身的线性算子。令 $M_n = \{x \in \mathscr{X} \,|\, \|Tx\| \leqslant n\|x\|\}$. 证明：存在 n_0 使得 M_{n_0} 在 $\mathscr{X}$ 中稠密。

5. (20分) 二元函数 $K(x, y) \in C([0,1] \times [0,1])$. A 是 $C[0,1]$ 中的一个有界集，记 $M = \{F(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy | f \in A\}$. 证明 M 是 $C[0,1]$ 中的列紧集。

6. (10分) 证明：集合 $E \subset l^p (p \geqslant 1)$ 列紧当且仅当它满足：(1) 存在 $M > 0, \forall x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \in l^p$, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. (2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_\varepsilon$, 当 $n > N_\varepsilon$ 时，有 $\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon$.

7. (10分) 设H是复Hilbert空间。A_1, A_2为H到自身的有界线性算子，且满足 $\langle x, A_1 x \rangle = \langle x, A_2 x \rangle, \forall x \in \mathrm{H}$. 证明：$A_1 = A_2$.

8. (20分) 若 $f \in C[0,1]$, $K(x, t)$ 是二元函数且在三角形区域 $D = \{(x, t) | x \in [0,1], 0 \leqslant t \leqslant x\}$ 上连续，证明：对任意实数 a, 积分方程

$$u(x) - a \int_0^x K(x, t) u(t)\, dt = f(x)$$

在 $C[0,1]$ 上存在唯一解。