1. (24分) 求下列各式：

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3^{\frac{1}{x}}-1)x$; 2) $\lim\limits_{x\to0+0}x\ln 2x$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$;

4) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $x\in(-1,1)$，在 $x_0=0$ 处展开的带拉格朗日型余项的3阶泰勒公式。

1. 解答：

1) $$\lim_{x\to+\infty}(3^{\frac{1}{x}}-1)x=\lim_{t\to0+0}\frac{3^t-1}{t}=\lim_{t\to0+0}\frac{3^t\ln 3}{1}=\ln 3.$$

2) $$\lim_{x\to0+0}x\ln 2x=\lim_{x\to0+0}\frac{\ln 2x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0+0}(-x)=0.$$

3) $$\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-x}{(\sqrt{1-x^2})^3}}{6x}=-\frac{1}{6}.$$

4) $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(0)x^3+\frac{1}{4!}f^{(4)}(\xi)x^4,\ \xi\in(0;x)$$

$$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^2-\frac{5}{128}(1+\xi)^{-\frac{7}{2}}x^4.$$

2. (20分)

1) 求 $\cos(\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}))$, 其中 $\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}$ 为$\mathbb{R}^3$中的非零向量，且有

$$(7\vec{\mathbf{a}}-5\vec{\mathbf{b}})\perp(\vec{\mathbf{a}}+3\vec{\mathbf{b}}),\quad(\vec{\mathbf{a}}-4\vec{\mathbf{b}})\perp(7\vec{\mathbf{a}}-2\vec{\mathbf{b}}).$$

2)已知直线 L 在平面 $P: x-y+z+3=0$ 上，且与直线 $L_0:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$ 垂直相交。求直线 L 的方程。

2.解答：

1) 由题设条件得：

$$\begin{cases}(7\vec{\mathbf{a}}-5\vec{\mathbf{b}})\cdot(\vec{\mathbf{a}}+3\vec{\mathbf{b}})=0,\\(\vec{\mathbf{a}}-4\vec{\mathbf{b}})\cdot(7\vec{\mathbf{a}}-2\vec{\mathbf{b}})=0.\end{cases}$$

故有

$$\begin{cases}7|\vec{\mathbf{a}}|^2+16\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}-15|\vec{\mathbf{b}}|^2=0,\\7|\vec{\mathbf{a}}|^2-30\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}+8|\vec{\mathbf{b}}|^2=0.\end{cases}$$

令$x=\frac{|\vec{\mathbf{a}}|}{|\vec{\mathbf{b}}|},y=\frac{\vec{\mathbf{a}}\cdot\vec{\mathbf{b}}}{|\vec{\mathbf{a}}||\vec{\mathbf{b}}|}$, 则有

$$\begin{cases}7x^2+16xy=15,\\7x^2-30xy=-8.\end{cases}$$

解得$x=1,y=\frac{1}{2}$, 从而有$\cos(\angle(\vec{\mathbf{a}},\vec{\mathbf{b}}))=y=\frac{1}{2}$.

2) 记直线L, L_0的方向向量分为$\vec{l},\vec{l_0}$, 平面P的法向量为$\vec{n}$, 则有$\vec{l}\perp\vec{l_0}$, $\vec{l}\perp\vec{n}$, 故有，

$$\vec{l}//\vec{l_0}\times\vec{n}=\{1,3,1\}\times\{1,-1,1\}=\{4,0,-4\}.$$

直线L, L_0的交点p_0也在平面P内，故p_0为L_0与平面P的交点。将L_0的参数方程

$$x=t+1,\quad y=3t+5,\quad z=t$$

代入P的方程可得$t=-1$, 故p_0坐标为$(0,2,-1)$. 于是L的方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{-1}.$$

3. (21分)

1) 求 $\int\sqrt{4-x^2}\ dx$； 2) 求 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2n+1}\ dx$, $n\geq 1$；

3）已知 f 在 $(-2,2)$ 上连续，求 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^1\left(f(x+h)-f(x)\right)\ dx$.

3.解答

1)令$x=2\sin t$ $(-\frac{1}{2}\pi<t<\frac{1}{2}\pi)$, 则$t=\arcsin\frac{x}{2}$. 从而有

$$\text{原式}=\int 4(\cos t)^2dt=2\int(1+\cos 2t)\ dt=2t+\sin 2t+C=2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+C.$$

2) 记该积分为I_{2n+1}. 用分布积分法可得

$$\begin{aligned}
I_{2n+1}=-\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2n}\ d\cos x &= \left(-(\sin x)^{2n}\cos x\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}\pi}+\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos x\cdot(2n)(\sin x)^{2n-1}\cdot\cos x\ dx\\
&= 2n\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(\sin x)^{2n-1}(1-(\sin x)^2)\ dx\\
&= 2n(I_{2n-1}-I_{2n+1}).
\end{aligned}$$

整理可得

$$I_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}I_{2n-1}.$$

由$I_1=1$可得，对$n\geq 1$, $I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

3) (注意，本题不能用牛顿莱布尼兹公式)

$$\int_0^1\left(f(x+h)-f(x)\right)\ dx=\int_h^{1+h}f(t)\ dt-\int_0^1 f(x)\ dx=\int_1^{1+h}f(x)\ dx-\int_0^h f(x)\ dx.$$

由连续函数积分中值定理得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_0^1\left(f(x+h)-f(x)\right)\ dx &= \frac{1}{h}\int_1^{1+h}f(x)\ dx-\frac{1}{h}\int_0^h f(x)\ dx\\
&= f(\eta_h)-f(\xi_h),
\end{aligned}$$

其中$\eta_h\in(1,1+h),\xi_h\in(0,h)$. 当$h\to 0$时，$\eta_h\to 1$, $\xi_h\to 0$. 再由函数f的连续性可得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^1\left(f(x+h)-f(x)\right)\ dx=f(1)-f(0).$$

4. (8分) 求将曲线 $r^2=8\cos(2\theta)$ 绕极轴旋转一周所得物体的表面积（记为S）。

4.解答

$$S = 2\cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} [r(\theta)\sin\theta]\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta)^2)}\ d\theta. \tag{1}$$

由$r^2 = 8\cos(2\theta)$得

$$2r\cdot r'(\theta) = -16\sin 2\theta.$$

结合(1)式可得

$$\begin{aligned} S &= 2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\sqrt{(r(\theta))^4 + (r(\theta)r'(\theta)^2)}\ d\theta \\ &= 32\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\ d\theta \\ &= (-32\cos\theta)|_0^{\frac{\pi}{4}} = 32(1-\frac{\sqrt{2}}{2}). \end{aligned}$$

5. (8分) 已知函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上有二阶导数，$|f''|$ 在 (a,b) 上有上界M. 记l为$[a,b]$ 上的函数, 其图像为过 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线段。请证明 $\forall x\in(a,b)$，有

$$|f(x)-l(x)|\le \frac{1}{8}M(b-a)^2.$$

5.解答

由题设，$\forall x\in(a,b)$, $l(x)=\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$. 由此可得

$$l(x)-f(x)=\frac{b-x}{b-a}(f(a)-f(x))+\frac{x-a}{b-a}(f(b)-f(x)). \tag{2}$$

用f带拉格朗日余项的泰勒展式可得

$$\begin{aligned} f(a)-f(x) &= (a-x)f'(x)+\frac{1}{2}(a-x)^2f''(\xi),\ (a<\xi<x),\\ f(b)-f(x) &= (b-x)f'(x)+\frac{1}{2}(b-x)^2f''(\eta),\ (x<\eta<b). \end{aligned}$$

代入(2) 式可得

$$l(x)-f(x)=\frac{(b-x)(x-a)}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}f''(\xi)+\frac{b-x}{b-a}f''(\eta)\right).$$

因为$\frac{x-a}{b-a}>0$, $\frac{b-x}{b-a}>0$, 且两数之和为1, 所以，

$$\begin{aligned} |l(x)-f(x)| &\le \frac{(b-x)(x-a)}{2}\left(\frac{x-a}{b-a}|f''(\xi)|+\frac{b-x}{b-a}|f''(\eta)|\right)\\ &\le \frac{(b-x)(x-a)}{2}M\\ &\le \frac{1}{2}M\left(\frac{b-x+x-a}{2}\right)^2\\ &= \frac{1}{8}M(b-a)^2. \end{aligned}$$

6. (8分) 已知函数 f 在 $[0,1]$ 上取值为正，且连续。下列极限若存在，请试求其值，并请说明理由；若不一定存在，请举例说明:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}.$$

6.解答

因为f在区间$[0,1]$ 上为正函数，且连续。故最大值$M>0$. 设$x_0\in[0,1]$使得$f(x_0)=M$. 对于任意$\epsilon>0$, 由f的连续性知，存在包含x_0区间$[c,d]\subset[0,1]$, $c<d$, 使得对于任意$x\in[c,d]$有

$$M-\epsilon<f(x)<M.$$

对于任意$n>1$,

$$(M-\epsilon)^n(d-c)<\int_0^1 (f(x))^n\,dx<M^n$$

由此可得，

$$(M-\epsilon)\sqrt[n]{d-c}<\left(\int_0^1 (f(x))^n\ dx\right)^{\frac{1}{n}}<M. \tag{3}$$

因为$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{d-c}=1$, 所以，存在$N_0\in\mathbb{N}$, 使得当$n>N_0$时，

$$\sqrt[n]{d-c}>\frac{M-2\epsilon}{M-\epsilon}.$$

与(3)式结合可得，当$n>N_0$时，

$$(M-2\epsilon)<\left(\int_0^1 (f(x))^n\ dx\right)^{\frac{1}{n}}<M.$$

由极限定义可得，

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^n\ dx\right)^{\frac{1}{n}}=M.$$

7. (6分) 请证明：对任意 $u,v>0$, $u\neq v$，有不等式:

$$\frac{2}{u+v}<\frac{\ln u-\ln v}{u-v}<\frac{1}{2}(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}).$$

7.解答

因为$f(x)=\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$上有, $f''(x)=2\frac{1}{x^3}>0$. 所以f在$(0,+\infty)$上为严格下凸的函数。对上述不等式的证明，可不妨设$v<u$. 在区间(v,u)上，令$x_0=\frac{1}{2}(u+v)$. 由下凸性质可得对$x\neq x_0$有

$$f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

考虑f在$[v,u]$上的积分，可得

$$\ln u-\ln v=\int_v^u\frac{1}{x}\ dx>f(x_0)(u-v)+f'(x_0)\int_{-\frac{1}{2}(u-v)}^{\frac{1}{2}(u-v)}x\ dx=\frac{2}{u+v}\cdot(u-v).$$

另一边的不等式可由$\frac{1}{x}$的下凸性质(f在$[v,u]$之间的图像在连接图像端点的直线下方)得到(但教材上似乎没有提到下凸函数这个性质)。

上面要证的不等式也可以化为一元函数的不等式情形再证明：令$x=\frac{u}{v}$, $u>v>0$, 则上面要证的不等式等价于

$$2\frac{x-1}{x+1}<\ln x<\frac{x^2-1}{2x},\ \forall x>1.$$

容易由导数性质得到。

8. (5分) 试给出$\mathbb{R}$上一个恒正的连续函数f，使其满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\ dx=1,\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\ dx=1,\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\ dx=10.$$

8. 解答: $f(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. 由$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\ dx=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\ dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx=2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\ dx=1.$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x+\mu)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\mu\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx \\
&= \mu.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\ dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ dx = \int_{-\infty}^{+\infty}(x+\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\mu^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ dx \\
&= \sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx + \mu^2.
\end{aligned}
$$

对任意$a>0$,

$$
\int_0^a x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = -\int_0^a x\ de^{-\frac{1}{2}x^2} = \left(-xe^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\Big|_0^a + \int_0^a e^{-\frac{1}{2}x^2}\ dx.
$$

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = \lim_{a\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}\ dx = 1.
$$

故有

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)\ dx = \sigma^2+\mu^2.
$$

取$\mu=1,\sigma=3$, 则$f(x):=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{18}}$满足题设要求。